УДК 658.512–52 + 621.002.2 + 004.388

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ КАЛЬКУЛЯТОР МАШИНОСТРОИТЕЛЯ

А.А. Лошкин, В.Ю. Шамин

В машиностроении, оформляя документацию, конструктор или технолог оперирует размерами, которые чаще всего имею предельные значения. Рассчитывая проекции угловых размеров, им приходится учитывать колебания не только линейных размеров, но и угловых величин. В этих случаях определение тригонометрических функций требует получения многократных результатов для анализа участия в расчетах минимальных и максимальных углов и линейных размеров. В представленной работе предложен автоматизированный калькулятор для расчета тригонометрических функций с предельными углами и размерами.

Ключевые слова: тригонометрические функции; предельные значения; функция переменных; границы множества; веб-калькулятор.

Для полного размерного анализа изделия достаточно просчитать размерные цепи в двух или трёх взаимно перпендикулярных плоскостях. При этом в чертежах, порой, встречаются размеры, заданные под углом к основным расчётным проекциям. В таких случаях перед технологом встаёт задача учёта непараллельных звеньев.

Методика расчёта цепей с непараллельными звеньями широко известна [1–3]. Она заключается в том, что в основном уравнении цепи каждое звено сопровождается передаточным коэффициентом. Для параллельных звеньев этот коэффициент равен 1 или –1, в зависимости от того, является данное звено увеличивающим или уменьшающим, для непараллельных он равен значению соответствующей тригонометрической функции от угла наклона звена. Погрешность же угла предлагается учитывать либо введением дополнительного звена, либо просто отбросить (если ей можно пренебречь).

За последние 20–30 лет вычислительная техника и программное обеспечение шагнули далеко вперёд, что позволяет решать подобные задачи «в лоб» без введения вспомогательных сущностей, и на основе общей постановки.

Рассмотрим простую схему (рис. 1). Для размера *A* заданного под углом α требуется найти проекции:

$$B_h = A \cos \alpha;$$
$$B_v = A \sin \alpha,$$

где α также является размером со своими допуском и отклонениями.

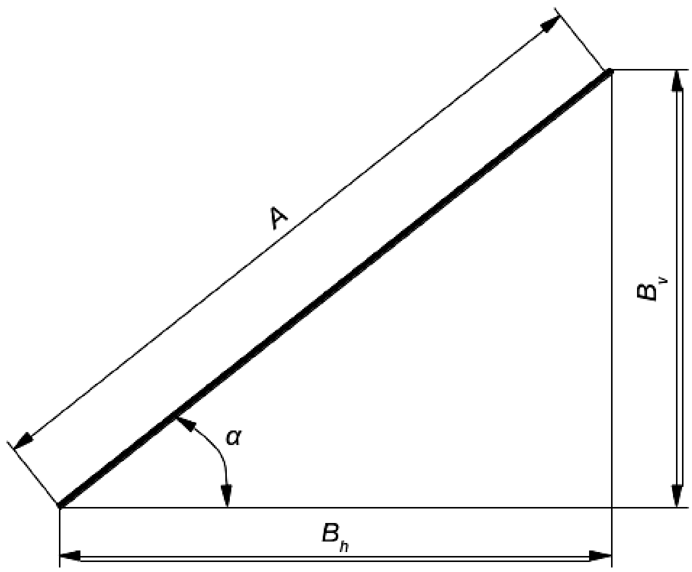

Рис. 1. Линейный размер и его проекции

В этом примере пока не определены функции вычисления синуса и косинуса от размера, а также умножения размера *A* на их результат.

Если рассмотреть поставленную задачу в более общем случае, то приходим к следующей постановке: над множеством размеров заданы функции, отображающие это множество в себя, и стоит вопрос об их вычислении. Изначально имеем функции типа f: $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$ (действительные функции от m действительных переменных). Таковыми в вышеприведённом примере являются тригонометрические функции (m = 1), а также умножение (m = 2).

Как же применить эти функции к размерам? Любой размер *A* можно рассматривать как отрезок на действительной прямой между его предельными значениями A_{min} и A_{max}:

$$A = \{ a : \ A_{min} \le a \le A_{max} \}.$$

Применив функцию f к каждой точке a этого отрезка, получим множество точек–образов (рис. 2). Одноместной функцией f от размера A назовём отображение A в B:

$$B = f(A) \Leftrightarrow B = \{ f(a),\ a \in A \}.$$

Здесь имеет смысл потребовать от функции f быть ограниченной и непрерывной на исходном отрезке. Тогда точные верхняя и нижняя границы полученного множества будут являться предельными значениями искомого размера:

$$B_{min} = min\ f\ (A);$$
$$B_{max} = max\ f\ (A).$$

Если f – функция m переменных, то предельные значения получаются из выражений:

$$B_{min} = min\ f\ (A_1, ..., A_m);$$
$$B_{max} = max\ f\ (A_1, ..., A_m).$$

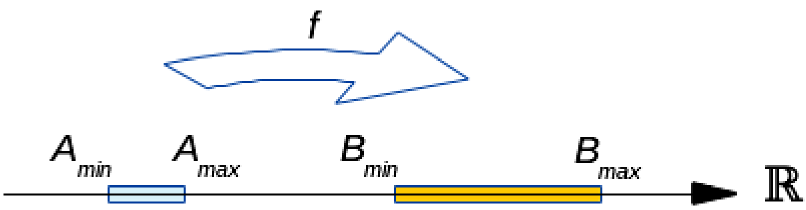

Рис. 2. Отображение размера A в B

Если функция f монотонна на рассматриваемом отрезке, то предельные значения легко находятся. Для возрастающей функции имеем:

$$B_{min} = f_{возр}\ (A_{min}),$$
$$B_{max} = f_{возр}\ (A_{max});$$

– для убывающей

$$B_{min} = f_{убыв}\ (A_{max}),$$
$$B_{max} = f_{убыв}\ (A_{min}).$$

В общем же случае придётся находить экстремумы f. Например, в случае вычисления синуса от размера 90° ± 1° (максимум достигается в середине отрезка 89...91, минимум – на концах). То же касается функций многих переменных.

Для примера рассчитаем проекцию B_h (см. рис. 1) для случая A = 20,1...20,2 и α = 45° ± 0,1°. Найдём сначала размер $C = \cos \alpha$, затем $B_h = A \cdot C$. Функция cos на отрезке 44,9...45,1 убывающая, поэтому:

$$C_{min} = cos\ \alpha_{max} = cos\ (45,1) \approx 0,70587;$$
$$C_{max} = cos\ \alpha_{min} = cos\ (44,9) \approx 0,70834.$$

Умножение рассматриваем как двухместную функцию. Она достигает минимума в точке (A_{min}, C_{min}) и максимума в точке (A_{max}, C_{max}), поэтому:

$$B_{h\,min} = A_{min} \cdot C_{min} = 20{,}1 \cdot 0{,}70587 = 14{,}188;$$
$$B_{h\,max} = A_{max} \cdot C_{max} = 20{,}2 \cdot 0{,}70834 = 14{,}308.$$

Результат: B_h = 14,188...14,308.

Рассмотрим теперь случай расчёта размерной цепи вероятностным методом. Поле допуска замыкающего звена определяется по формуле:

$$T_{\Sigma} = \frac{1}{\lambda_{\Sigma}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 T_i^2}$$

где λ_i – коэффициент относительного рассеяния соответствующего i-го составляющего звена. Его значение зависит от принятого закона распределения: 1/3 — для нормального закона, $1/\sqrt{(3)}$ – для закона равной вероятности, $1/\sqrt{(6)}$ – для закона треугольника.

Пусть в рассчитываемую вероятностным методом цепь входит звено, подвергнутое функциональному преобразованию f (например, в цепи участвует его проекция). Вид закона распределения преобразованного размера в общем случае будет отличаться от закона распределения исходного размера (хотя бы числовыми характеристиками). Каким тогда должно быть i-ое слагаемое в формуле (1)?

Формула (1) выражает теорему о дисперсии суммы независимых случайных величин. Для перехода к полям рассеяния и вводится коэффициент λ_i, который является относительным средним квадратичным отклонением:

$$\lambda_i = 2\sigma_i / T_i \,.$$

Теперь очевидно, что каждое слагаемое под корнем в (1) есть учетверённая дисперсия соответствующего звена. А дисперсия и математическое ожидание функции f случайного аргумента, как известно, находятся по формулам:

$$\sigma^2[B] = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - M[B])^2 \varphi(x)\,dx\,, \quad M[B] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ – известная плотность распределения исходного размера.

То есть:

$$\lambda_i^2 T_i^2 = 4 \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - M[B])^2 \varphi(x)\,dx.$$

Описанный в статье подход для метода полной взаимозаменяемости реализован в виде веб-калькулятора, ознакомиться с которым может каждый в режиме он-лайн, перейдя по ссылке: http://northewind.github.io.

Калькулятор использует передовую технологию веб-компонентов Shadow DOM, которую на настоящий момент поддерживает только браузер Google Chrome (в том числе последние релизы мобильной версии).

На рис. 3. представлен вид графического интерфейса пользователя.

Калькулятор позволяет выполнять простейшие одно- и двуместные операции над размерами, достаточные для расчёта плоской размерной цепочки. Тригонометрические функции интерпретируют аргумент как градусы.

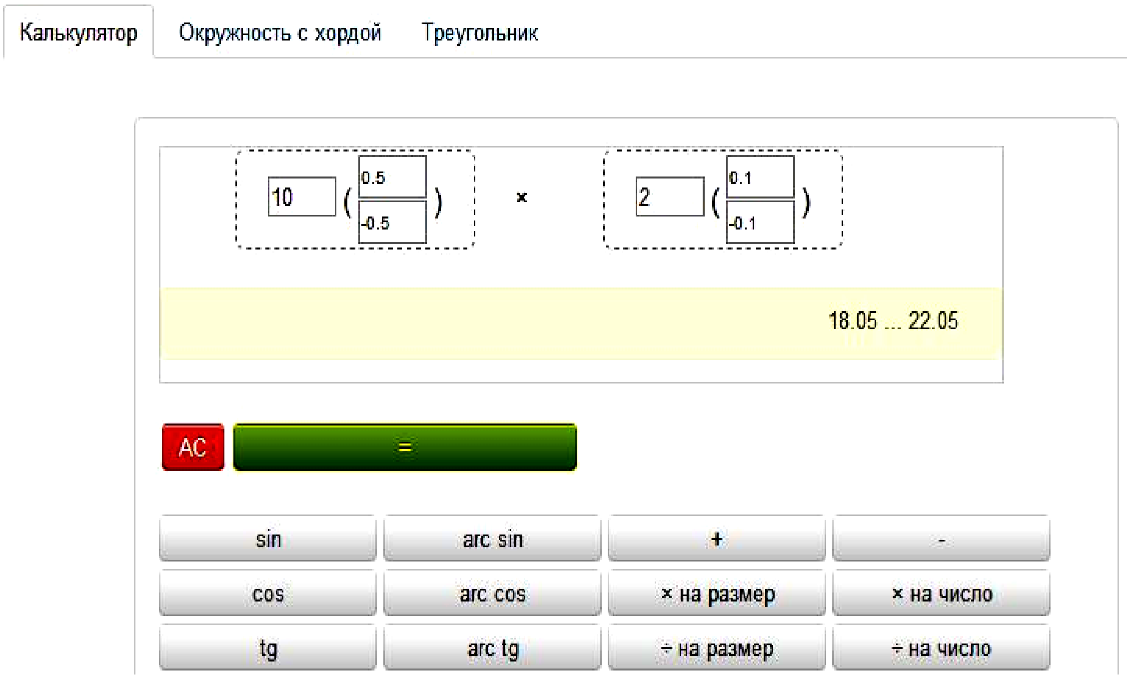

Рис. 3. Веб-интерфейс калькулятора

Классы модели MVC (шаблон model-view-controller) задействованы в нескольких прикладных задачах. Среди них часто встречающаяся задача расчёта треугольника (рис. 4). Здесь также все линейные и угловые величины могут быть рассчитаны с учётом заданных отклонений.

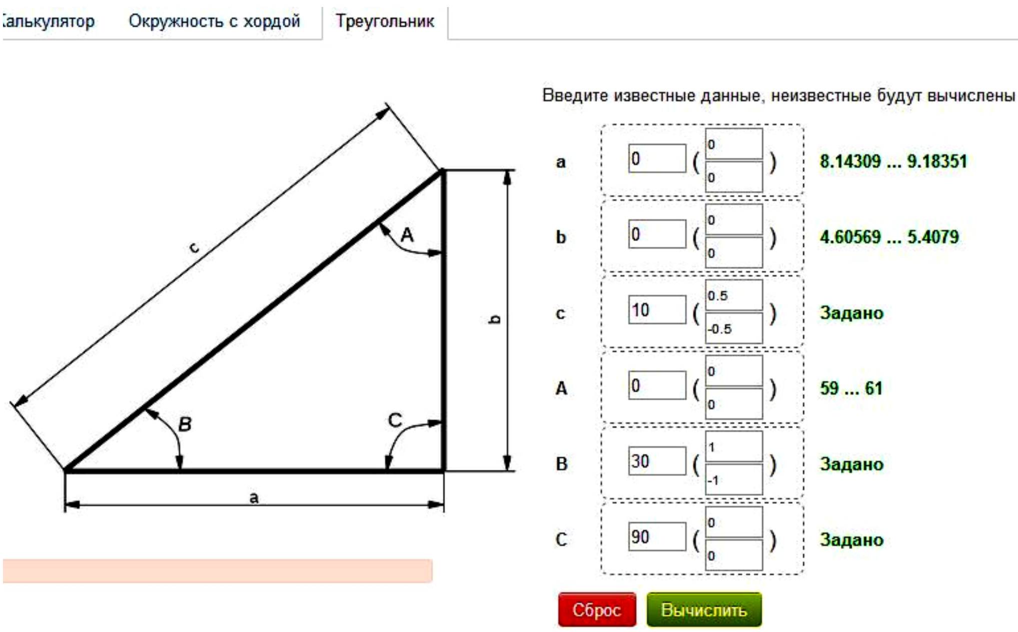

Рис. 4. Расчёт треугольника с допусками

Библиографический список

1. Допуски и посадки: справочник в 2-х ч. / В.Д. Мягков, М.А. Палей, А.Б. Романов, В.А. Брагинский. – 6-е изд., перераб. и доп. – Л.: Машиностроение, 1983. – Ч. 2. – 448 с.

2. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – 7-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2001. – 575 с.

3. Солонин, И.С. Расчёт сборочных и технологических размерных цепей / И.С. Солонин, С.И. Солонин. – М.: Машиностроение, 1980. – 110 с.

4. Анухин, В.И. Допуски и посадки: учебное пособие / В.И. Анухин. – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2008. – 207 с.