УДК 514.185.2 + 004.92

ПРИЛОЖЕНИЯ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА К КОНСТРУИРОВАНИЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.А. Короткий

Рассмотрен графический алгоритм построения поверхности на замкнутом контуре, образованном плоскими кривыми линиями в четырехмерном пространстве. Показана возможность конструктивной реализации алгоритма на трехмерном эпюре с помощью средств современной компьютерной графики. Даны примеры построения поверхности на трехзвенном и четырехзвенном контурах.

Ключевые слова: определитель поверхности, образующая линия, замкнутый контур, пучок плоскостей, трехмерная графика, гиперэпюр.

Одним из способов формирования поверхности является разработанный в XIX веке ключевой способ. В этом способе определитель поверхности содержит условие («ключ»), задающий закон изменения формы образующей линии. Ключ проекционно связан с главными видами, что позволяет рассматривать чертеж с изображением ключа как чертеж поверхности в четырехмерном пространстве. Современная трактовка ключевых способов формирования поверхности как задачи начертательной геометрии четырехмерного пространства E^4 дана в работе [1].

Алгоритм построения поверхности в четырехмерном пространстве

Пусть в E^4 имеется образованный плоскими кривыми линиями четырехзвенный контур *ABCD*, на который надо «натянуть» поверхность.

1. Отмечаем точки пересечения $U=\sigma(AB)\cap\eta(CD)$, $V=\rho(AD)\cap\tau(BC)$ плоскостей противолежащих звеньев (рис. 1).

2. Между точками противолежащих звеньев устанавливаем взаимнооднозначное соответствие, описываемое некоторой *функцией соответствия* φ, которая каждой точке одного из звеньев ставит в соответствие единственную точку противолежащего звена (в соответствии с [1], выбираем *способ параметризации*). Пусть взаимнооднозначное соответствие точечных рядов звеньев *AB* и *CD* описывается некоторой функцией φ_1, а звеньев *AD* и *BC* – функцией φ_2.

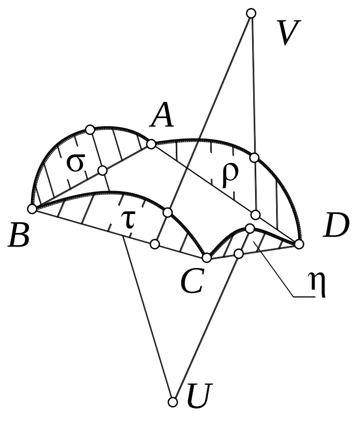


Рис. 1

3. Формируем два пучка вспомогательных плоскостей. Плоскости одного пучка, включая в себя σ и η, проходят через базисную точку $U=\sigma\cap\eta$ и через пары соответственных в φ_2 точек на звеньях AD и BC. Плоскости другого пучка проходят через базисную точку $V=\rho\cap\tau$ и через пары соответственных в φ_1 точек на звеньях AB и CD, включая в себя ρ и τ.

4. Точки пересечения плоскостей пучков U и V образуют поверхность в четырехмерном пространстве, проходящую через контур $ABCD$.

Покажем, что на этой поверхности располагаются два семейства образующих. Подвижная плоскость пучка V, пересекая фиксированную плоскость пучка U, определяет однопараметрическое множество точек – плоскую криволинейную образующую, лежащую в плоскости пучка U. В каждой плоскости пучка U формируется образующая, то есть множеству ∞^1 плоскостей пучка U соответствует множество ∞^1 не пересекающихся между собой образующих одного семейства. Аналогично, в каждой плоскости пучка V находится образующая другого семейства. Получаем два однопараметрических семейства плоских образующих искомой поверхности. Через любую точку поверхности проходит одна образующая первого семейства и одна образующая второго семейства.

Очевидно, многообразие функций соответствия φ_1 и φ_2 (вариантов параметризации) порождает многообразие двумерных поверхностей в четырехмерном пространстве, проходящих через данный контур.

Если требуется построить поверхность, проходящую через данный контур $ABCD$ в трехмерном пространстве $E^3(xyz)$, то контур «погружают» в четырехмерное пространство $E^4(xyzt)$, придавая узлам A, B, C, D произвольные координаты по оси t. В объемлющем четырехмерном пространстве выполняют построение поверхности по вышеописанному алгоритму. Проекция полученной поверхности на гиперплоскость xyz доставляет решение исходной задачи трехмерного пространства.

Пример 1. Построить поверхность, проходящую через четырехзвенный контур $ABCD$ (рис. 2).

Присвоив узлам контура произвольные координаты по оси t, получаем гиперэпюр, состоящий из трехмерных проекций узлов контура на «фронтальную» $\Gamma'(xyz)$ и «горизонтальную» $\Gamma''(xyt)$ гиперплоскости проекций.

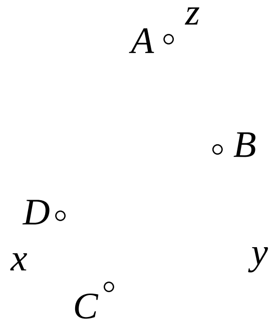


Рис. 2

При погружении узлов контура в четырехмерное пространство положение плоскостей σ, η, ρ, τ и базисных точек U, V становится неопределенным. Чтобы полностью определить положение звеньев контура в пространстве E^4, необходимо указать (выбрать) положение базисных точек. Пусть плоскости σ и η звеньев AB и CD пересекаются в точке $U=Z_\infty$, а плоскости ρ и τ звеньев AD и BC – в точке $V=X_\infty$. В этом случае плоскости звеньев AB и CD, как и сами звенья, проецируются на Г″ прямыми линиями. Проекции на Г″ криволинейных звеньев *AD* и *BC* определяются по общему правилу начертательной геометрии: если линия принадлежит плоскости, то проекция линии принадлежит проекции плоскости.

Задаем два пучка вспомогательных плоскостей δ и ω. Для формирования пучка δ проведем гиперплоскость Δ^3, параллельную *xzt*. Положение Δ^3 в E^4 вполне определяется одним параметром – координатой *y*. Для формирования пучка ω проведем гиперплоскость Ω^3, параллельную *yzt*. Ее положение вполне определяется координатой *x*. Таким образом, в пространстве E^4 определены два однопараметрических пучка плоскостей.

Произвольная плоскость δ пересекается с произвольной плоскостью ω в некоторой точке *R*. Положение плоскости δ определяется координатой *y*, положение плоскости ω – координатой *x*, поэтому координаты *x*, *y* точки *R* зафиксированы выбором пары пересекающихся плоскостей δ и ω. Получаем двупараметрическое множество точек искомой поверхности. Проекция этой поверхности на гиперплоскость Г′ доставляет решение поставленной задачи (рис. 3).

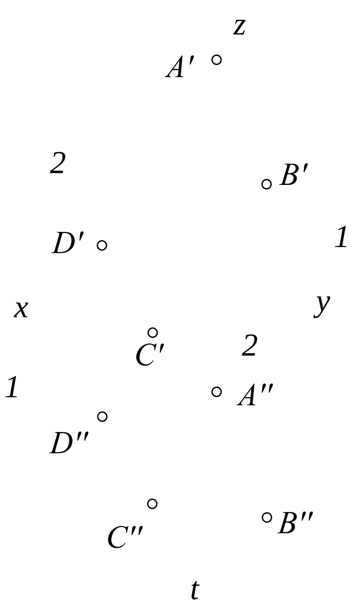


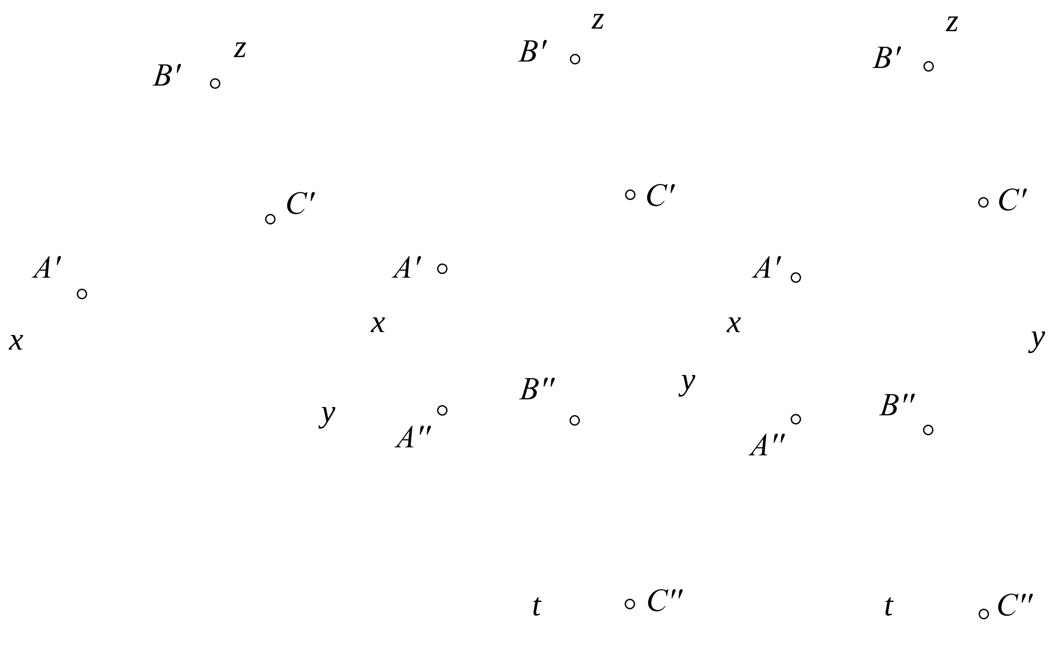
Рис. 3

Во всех вариантах «ключевого» проектирования решается задача натягивания поверхности на четырехзвенный замкнутый контур. Покажем, что рассмотренный алгоритм позволяет решить эту задачу для трехзвенного контура. Действительно, если одну из вершин трехзвенного контура считать четвертым звеном контура, выродившимся в точку, то алгоритм полностью сохраняет свою конструктивную определенность.

Пример 2. В трехмерном пространстве построить поверхность, проходящую через трехзвенный замкнутый контур *ABC* (рис. 4, а).

Положим, что в E^4 плоскости σ и η звеньев *AB* и *AC* пересекаются в точке Z_∞. Тогда плоскости этих звеньев $\sigma(ABZ_\infty)$ и $\eta(ACZ_\infty)$ пересекаются в четырехмерном пространстве по прямой AZ_∞, образуя гиперплоскость $\Sigma(\sigma\cap\eta)$. Также будем полагать, что плоскость τ звена *BC* пересекается с плоскостью ρ противолежащего ей звена в точке Y_∞. При таком выборе базисных инциденций звенья *AB* и *AC* (и сами звенья) проецируются на Г″ прямыми линиями *A″B″* и *A″C″* (рис. 4, б).

Пучок вспомогательных плоскостей с осью AZ_∞ перспективен ряду точек звена *BC*. Другой пучок вспомогательных плоскостей проходит через точку Y_∞. Потребуем, чтобы любая плоскость этого пучка была параллельна гиперплоскости *zyt*. Тогда каждому значению координаты *x* ставится в соответствие единственная плоскость пучка Y_∞, а между точками противолежащих звеньев *AB* и *AC* устанавливается взаимнооднозначное соответствие. Две произвольные плоскости пучков вспомогательных плоскостей пересекаются в точке. Двупараметрическое множество таких точек определяет поверхность в E^4, натянутую на данный треугольный контур. Проекция этой поверхности на гиперплоскость Г′(xyz) доставляет решение задачи (см. рис. 4, б).



а) ***б)*** ***в)***

Рис. 4. Поверхность на трехзвенном контуре

На рис. 4, в показана поверхность, натянутая на тот же самый трехзвенный контур, но с иным выбором базисных точек: звенья *AC* и *BC* получили общую базисную точку Z_∞, а плоскость звена *AB* стала пересекаться с плоскостью противолежащего звена (выродившегося в точку *C*) в точке X_∞. Полученные поверхности не совпадают, но отличаются незначительно.

Заключение. Рассмотренный способ геометрического формирования поверхности, не конкурируя с алгебраическими методами, расширяет и дополняет возможности конструктора.

Библиографический список

1. Волошинов, Д.В. Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация: монография / Д.В. Волошинов. – Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2010. – 355 с.

К содержанию