УДК 514.142.24

КВАДРАТИЧНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА, УСТАНОВЛЕННОЕ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В.А. Короткий

Рассмотрено функциональное соответствие, установленное между элементами совмещенных точечного и линейчатого пространств, в котором точке соответствует линия пересечения полярных плоскостей в поляритетах, заданных двумя произвольными квадриками. Показано, что прямолинейному ряду точек ставится в соответствие семейство образующих линейчатой поверхности второго порядка. Дан пример применения рассмотренного соответствия в курсе начертательной геометрии.

Ключевые слова: линейчатое пространство, пучок поверхностей второго порядка, поляритет, полярная плоскость, квадратичная кремонова инволюция.

Даны две поверхности второго порядка (ПВП, квадрики) Φ_1, Φ_2 с уравнениями $F_1(x,y,z)=0$, $F_2(x,y,z)=0$, пересекающиеся по биквадратной кривой f. Поверхность Φ_λ с уравнением $\lambda F_1+(1-\lambda)F_2=0$ при любом значении параметра λ также проходит через f. Изменяя λ, получаем пучок (однопараметрическое множество) поверхностей второго порядка Ψ, включающий в себя исходные поверхности Φ_1 (при $\lambda=1$) и Φ_2 (при $\lambda=0$). Через любую точку пространства E^3 проходит единственная квадрика пучка Ψ.

В поляритетах, установленных квадриками Φ_1, Φ_2, произвольной точке M соответствуют полярные плоскости μ_1 и μ_2, пересекающиеся по прямой m (рис. 1). Рассмотрим отображение $m=\varphi(M)$, которое всякой точке M пространства E^3 ставит в соответствие прямую $m=\mu_1\cap\mu_2$. Функциональная взаимосвязь $m=\varphi(M)$ является в целом однозначной: произвольной точке M пространства E^3 соответствует единственная прямая m, за исключением особых точек F, каждая из которых индуцирует совпадающие полярные плоскости в поляритетах Φ_1, Φ_2; при этом положение прямой m становится неопределенным.

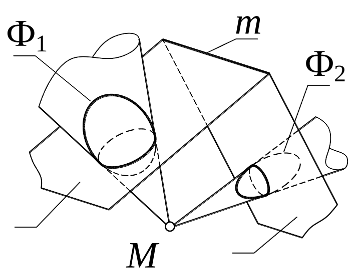

Рис. 1

Область определения (область отправления) функции $\varphi(M)$ – все трехмерное множество ∞^3 точек M пространства E^3. Область значений (область прибытия) – алгебраический комплекс K^3, выделенный из четырехмерного множества прямых L^4 указанием квадрик Φ_1, Φ_2 и алгоритмом $m=\varphi(M)$.

Существует и обратная функция $M=\varphi^{-1}(m)$, которая всякой прямой m из комплекса K^3 ставит в соответствие точку $M=n_1\cap n_2$ пространства E^3, где n_1, n_2 – взаимные поляры прямой m относительно квадрик Φ_1, Φ_2. Область определения обратной функции совпадает с областью значений прямой функции, то есть с комплексом K^3, выделенным из L^4. Область значений обратной функции совпадает с областью определения прямой функции, то есть с множеством точек пространства E^3.

Обратная функция $M=\varphi^{-1}(m)$ является в целом однозначной: произвольной прямой m комплекса K^3 соответствует единственная точка M, за исключением особых прямых j, каждая из которых порождает совпадающие взаимные поляры $n_1= n_2$ в поляритетах Φ_1, Φ_2; при этом положение точки M становится неопределенным.

Таким образом, рассматривается в целом взаимно однозначное соответствие множества ∞^3 точек пространства E^3 и множества ∞^3 прямых, входящих в комплекс K^3. Прямая функция $m=\varphi(M)$ выполняет *инъективное отображение* (*инъекцию*) элементов трехмерного точечного пространства E^3 в элементы четырехмерного линейчатого пространства L^4 (инъекция ограничена множеством K^3). Обратная функция $M=\varphi^{-1}(m)$ описывает *сюръективное отображение* (*сюръекцию*) множества прямых комплекса K^3 на множество точек пространства E^3. Прямой линии, не входящей в K^3, не соответствует ни одна точка в E^3 (рис. 2).

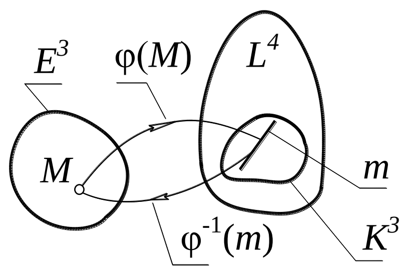

Рис. 2

Теорема 1. *Полярные плоскости произвольной точки М относительно всех квадрик пучка Ψ пересекаются по одной и той же прямой m.* Иначе говоря, любая пара квадрик пучка Ψ определяет одно и то же инъективное отображение $m=\varphi(M)$. Выделяемый из L^4 комплекс прямых K^3 полностью определен пучком Ψ, который в свою очередь вполне определен данными ПВП Φ_1, Φ_2.

Доказательство. Выделяем из пучка Ψ произвольную квадрику Φ_3. Отметив в E^3 произвольную точку M, найдем прямую m как образ точки M в отображении $m=\varphi(M)$ относительно данных квадрик Φ_1, Φ_2. Покажем, что прямая m как образ точки M в отображении $m=\varphi(M)$ не изменяется при замене Φ_1 или Φ_2 на квадрику Φ_3, произвольно выбранную из пучка Ψ.

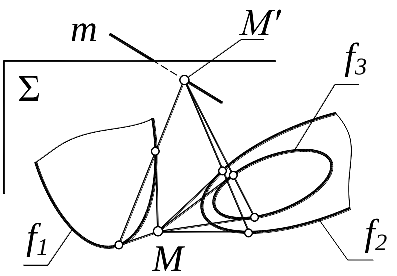

Рис. 3

Проведем через M произвольную плоскость Σ. В сечении пучка Ψ плоскостью Σ получаем пучок конических сечений ψ, в котором содержатся сечения $f_1=\Phi_1\cap\Sigma$, $f_2=\Phi_2\cap\Sigma$, $f_3=\Phi_3\cap\Sigma$ (рис. 3). Поляры точки M относительно f_1 и f_2 должны пересечься в точке $M'=m\cap\Sigma$ на прямой m. Действительно, поляры точки M представляют собой сечения плоскостью Σ полярных плоскостей μ_1, μ_2 точки M относительно Φ_1, Φ_2. Поскольку плоскости μ_1, μ_2 точки M пересекаются по m, то полученные в сечении Σ поляры также пересекаются на m.

Как известно [1], поляры точки M относительно всех конических сечений пучка ψ (в том числе – относительно f_3) должны пересечься в одной точке, а именно – в точке M' на прямой m, поскольку в этой точке пересекаются поляры точки M относительно сечений f_1, f_2.

Но поляра точки M относительно f_3 – это сечение полярной плоскости μ_3 произвольной секущей плоскостью Σ, проходящей через M. Следовательно, полярные плоскости μ_1, μ_2, μ_3 точки M относительно Φ_1, Φ_2, Φ_3 располагаются в пространстве таким образом, что в сечении этих плоскостей произвольной плоскостью Σ получаются прямые, пересекающиеся в одной точке. Такое возможно только в том случае, когда плоскости μ_1, μ_2, μ_3 пересекаются по одной прямой. Плоскости μ_1 и μ_2 пересекаются по m, следовательно, полярные плоскости μ_1, μ_2, μ_3 точки M относительно квадрик Φ_1, Φ_2, Φ_3 пересекаются по m. Но квадрика Φ_3 была произвольно выбрана из пучка Ψ. Следовательно, полярные плоскости точки M относительно *всех* квадрик пучка Ψ пересекаются по одной прямой, ч.т.д.

Рассмотрим образ линейчатого пространства, соответствующий прямолинейному ряду точек пространства E^3.

Теорема 2. *В функциональной зависимости $m=\varphi(M)$ прямолинейному ряду точек M пространства E^3 соответствует однопараметрическое множество прямых m, образующих линейчатую поверхность второго порядка* Θ. Очевидно, поверхность Θ «вложена» в комплекс K^3, выделенный из L^4 указанием пучка квадрик Ψ.

Доказательство. Проведем через прямую a, несущую ряд точек M, произвольную плоскость α, пересекающую квадрики пучка Ψ по пучку коник e_1, e_2, e_3,… (рис. 4). Пробегая прямую a, точка M индуцирует, в соответствии с зависимостью $m=\varphi(M)$, однопараметрическое множество прямых m (линейчатую поверхность Θ), пересекающихся с α в точках M'.

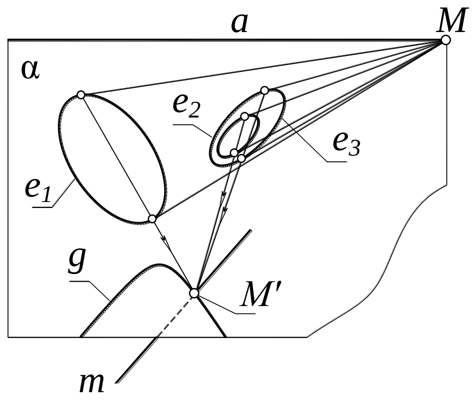

Рис. 4

Точка M' в плоскости α может быть получена как точка пересечения поляр точки M относительно коник пучка e_1, e_2, e_3,… Точечное соответствие $M \leftrightarrow M'$ – это квадратичная кремонова инволюция первого рода [1], в которой ряду точек на прямой a соответствует ряд точек на кривой второго порядка g. Кривая g (в рассматриваемом примере – гипербола) – гомалоид прямой a. На рис. 4 условно показана только одна ветвь гиперболы g.

Таким образом, точка M, пробегающая прямую a, порождает (в сечении поверхности Θ плоскостью α) кривую второго порядка g. Поскольку плоскость α – произвольная плоскость пучка с осью a, то любая другая плоскость этого пучка пересечет линейчатую поверхность Θ по кривой второго порядка. Но это означает, что Θ – поверхность второго порядка, ч.т.д.

Следствие из теоремы 2. *Отображение* $m=\varphi(M)$*, установленное пучком квадрик, расслаивается (в пучке секущих плоскостей с произвольно выбранной в пространстве* E^3 *осью) на квадратичные кремоновы инволюции первого рода.*

Отметим, что теорема, обратная теореме 2, не имеет места: семейству образующих m линейчатой поверхности второго порядка, *произвольно* выделенной из комплекса K^3 линейчатого пространства L^4, в точечном пространстве E^3 не соответствует прямолинейный ряд точек M. В этом случае обратная функция $M=\varphi^{-1}(m)$ описывает однопараметрическое точечное множество, заполняющее пространственную кривую четвертого порядка.

Рассмотрим образ линейчатого пространства, соответствующий плоскому точечному полю β пространства E^3. Поскольку всякой точке B, принадлежащей β, соответствует прямая линия b комплекса K^3, выделенного из L^4 указанием пучка квадрик Ψ, то двупараметрическое множество точек B выделяет из K^3, согласно функции $b=\varphi(B)$, алгебраическую конгруэнцию Kr^2 (двупараметрическое множество прямых линий).

Пример (теорема о перспективном расположении ПВП). *Если две невырожденные ПВП* Φ_1 и Φ_2 *соприкасаются в двух точках (действительных или мнимых), то в пространстве существуют четыре различные гомологии, устанавливающие взаимно однозначное соответствие между точками поверхностей* Φ_1 *и* Φ_2.

Доказательство сводится к исследованию квадратичного соответствия $m=\varphi(M)$: всякой точке M отвечает линия пересечения m ее полярных плоскостей в поляритетах, установленных квадриками Φ_1 и Φ_2. В этом преобразовании связке плоскостей с центром A на прямой m соответствует связка прямых с центром A' на той же самой прямой m. Полученное соответствие A-A', ... проективно и инволюционно. Двойные точки инволюции определяют на m центры S_1, S_2 искомых гомологий.

Библиографический список

1. Короткий, В.А. Квадратичное преобразование плоскости, установленное пучком конических сечений / В.А. Короткий // Омский научный вестник. – 2013. – № 1(117). – С. 9–14.

К содержанию