УДК 621.771 (0.75.8)

ДИСКРЕТНО-ЛОКАЛЬНЫЙ МЕТОД МИНИМИЗАЦИИ НЕВЯЗОК ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОБРАБОТКИ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Н.В. Судаков

Из результатов анализа известных вариационных принципов теории пластичности следует, что минимизация функционалов в прямых вариационных методах представляет минимизацию невязок при удовлетворении тех или иных уравнений замкнутой системы механики сплошной среды. Показана возможность минимизации невязок при удовлетворении непосредственно соответствующих уравнений взамен минимизации традиционных функционалов. Для преодоления математических проблем, предложен дискретно-локальный метод минимизации невязок.

Ключевые слова: функционал, уравнения, минимизация, невязка.

Точное решение системы дифференциальных уравнений механики сплошной среды в рамках ограничений прикладной задачи, которое бы соответствовало действительному напряженному и деформированному состоянию, достигается лишь в простейших случаях, имеющих ограниченный практический интерес. В связи с этим приоритет отдается приближенным методам, которые при необходимости позволяют уточнять решение. К таким методам относятся вариационные, в основе которых лежит ряд принципов и соответствующих вариационных уравнений, эквивалентных исходной системе уравнений механики сплошной среды. Широкую известность получили вариационные принципы Лагранжа, Журдена, Кастильяно, Маркова и, наконец, принцип виртуальных скоростей (перемещений) и напряжений В.Л. Колмогорова [1], из которого названные выше принципы вытекают как частные при упрощенной постановке задачи.

Использование прямых методов при реализации вариационных принципов позволяет уточнять решение путем добавления членов ряда последовательности координатных функций для искомых параметров. Однако при этом усугубляется проблема минимизации функционалов, обусловленная в частности их неквадратичностью.

Исследователями предлагаются различные варианты алгоритмов и нестандартные приемы, в той или иной мере позволяющие преодолеть математические трудности и получить приближенное решение. Однако пока не найдено оптимального формализованного алгоритма.

Вариационный принцип виртуальных скоростей и напряжений для одновременного определения напряженного и деформированного состояний [1] остается пока достаточно трудоемким. Принцип виртуальных скоростей (перемещений) и напряжений реализуется на заданных кинематически возможных полях скоростей и статически допустимых полях напряжений, включающих неизвестные (варьируемые) параметры. При этом заданные поля скоростей и напряжений удовлетворяют статическим и кинематическим уравнениям, а также соответствующим граничным условиям. Не удовлетворенными остаются физические уравнения. Отсюда следует очевидный вывод, что функционал принципа [1] по своей сути является функционалом невязки, усредненной по объему и недифференцированной по физическим связям между конкретными компонентами тензоров напряжений и деформаций. Таким образом, поля скоростей и напряжений, определенные на основе принципа, обеспечивают точное удовлетворение статических, кинематических уравнений и соответствующих граничных условий. Физические уравнения удовлетворяются лишь на среднем интегральном уровне. Иначе говоря, обеспечивается квазидопустимое в физическом отношении состояние деформируемого тела.

Результаты анализа [2, 12 и др.] позволяют сделать общий для всех известных вариационных принципов вывод – функционалы известных вариационных принципов являются невязками при удовлетворении тех или иных уравнений из состава замкнутой системы уравнений механики сплошной среды, которые минимизируются на основе соответствующих вариационных уравнений.

Логично полагать, что аналогичные результаты могут быть получены на основе минимизации функционала невязки при удовлетворении непосредственно физических уравнений вместо минимизации базового функционала:

$$J(a_k,\beta_k)=\int_V\left[T(r,z,a_k)-T(r,z,\beta_k)\right]^2 dV\rightarrow\min. \qquad (1)$$

где $a_к$ – неизвестные параметры функциональных рядов для напряжений,

β_k – неизвестные параметры функциональных рядов для скоростей,

$T(r,z,a_k)$ – интенсивность касательных напряжений, определяемая на основе статически допустимых напряжений,

$T(r,z,\beta_k)$ – интенсивность касательных напряжений, определяемая на основе кинематически возможного поля скоростей и определяющего физического уравнения.

Процедура минимизации известных функционалов сопровождается интегрированием, дифференцированием и решением в общем случае не линейной относительно искомых параметров системы алгебраических уравнений. Практика решения краевых задач обработки материалов давлением показывает, что на этапе минимизации функционалов достаточно часто возникают математические трудности, сопровождающиеся значительным временем расчета, нестабильностью расчетной процедуры в случае изменения исходных данных, отсутствием решения системы вариационных уравнений. Не является исключением в этом отношении и функционал (1). Тем не менее возможность выбора функционалов и алгоритмов в определенной мере позволит смягчить математические трудности. Вместе с тем кардинальное решение проблемы требует поиска неординарных подходов. Рассмотрим один из таких возможных подходов, называемый в дальнейшем дискретно-локальным методом (ДЛМ).

В настоящее время программные средства компьютерной математики обеспечивают возможность приближенного решения переопределенных систем уравнений (число уравнений больше числа неизвестных). В частности указанную возможность обеспечивает Mathcad Pro с помощью встроенной функции « mineer», минимизирующей невязки, обусловленные переопределенностью системы уравнений. В связи с этим имеется возможность замены процедуры интегрирования и минимизации функционалов решением конечного числа (превышающего число неизвестных) алгебраических уравнений, представляющих соответствующие невязки, в различных точках деформируемого тела. Для этого область деформирования разбивается координатной сеткой. Для каждого узла сетки с известными координатами записывается уравнение невязки, например, при удовлетворении определяющего физического уравнения. В результате получаем систему уравнений вида:

$$T(r_i, z_j, a_k) - T(r_i, z_j, \beta_k) = 0\,,$$

где r_i и z_j – координаты узловых точек.

Эффективность предлагаемого приближенного метода может быть оценена непосредственным расчетом невязок в произвольных (не совпадающих с узловыми) точках тела после нахождения неизвестных (варьируемых) коэффициентов.

В заключение важно заметить, что предлагаемый вариант дискретно-локальной минимизации невязок коренным образом решает проблемы, связанные с неквадратичностью функционалов.

Апробация ДЛМ осуществлялась на примере осадки сплошной цилиндрической заготовки в условиях прилипания на контакте с инструментом (рис. 1). Материал заготовки характеризуется не линейно вязкими свойствами.

Для реализации решения были использованы программные средства Mathcad Pro для Windows, которые численное интегрирование осуществляют на основе алгоритмов Ромберга, ускоряющих сходимость последовательности метода трапеций или метода прямоугольников к интегралу; для вычисления производных используют модифицированный метод Риддера, а для решения систем уравнений и неравенств – итерационный метод Левенберга-Маркардта, позволяющий в случае переопределенной системы уравнений получать приближенное решение путем минимизации невязок.

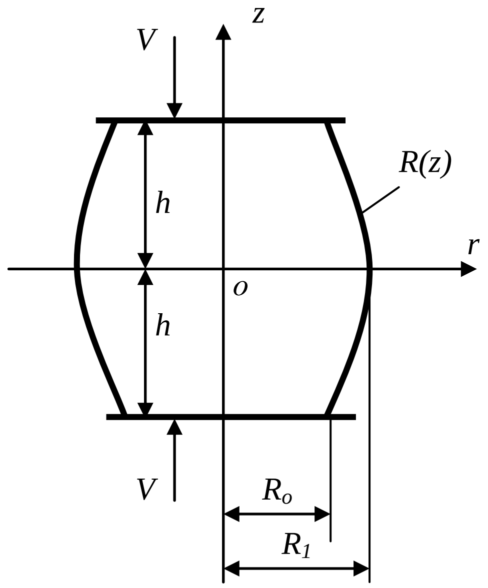

Рис. 1. Схема осадки
цилиндрической заготовки

Поле скоростей задавалось степенным полиномом 9-ой степени по независимым аргументам r и z. Часть коэффициентов полинома была определена методом неопределенных коэффициентов при удовлетворении кинематических граничных условий и условия несжимаемости. В итоге кинематически возможное поле скоростей включало пять неизвестных коэффициентов.

Из физических уравнений были определены касательные напряжений, а нормальные – из дифференциальных уравнений равновесия с точностью до функций интегрирования $f(r)$ и $f(z)$. Функция $f(z)$ находилась из условия равенства нулю нормальных напряжений на контуре $R(z)$, а функция $f(r)$ в выражении для σ_{zz} задавалась пятью четными членами степенного ряда, включающего дополнительно 5 неизвестных коэффициентов.

В итоге статически допустимое поле напряжений зависело от пяти параметров, унаследованных от поля скоростей, и от пяти параметров, содержащихся в выражении σ_{zz}. В целом задача свелась к определению 10-ти неизвестных коэффициентов.

Заметим, что согласованность девиаторных составляющих поля скоростей и поля напряжений на основе физических связей упрощает процедуру минимизации невязок при удовлетворении физических уравнений, но в целом для напряжений (с учетом шаровой составляющей) не обеспечивает удовлетворение физических уравнений.

Попытка определения коэффициентов путем минимизации известного базового функционала принципа виртуальных скоростей и напряжений программными средствами Mathcad Pro не увенчалась успехом. Ситуация достаточно типичная для задач механики сплошной среды. Выход из нее обычно предполагает упрощение задачи либо применение (разработку) других программных средств численных решений. В нашем случае решение задачи было достигнуто использованием предложенного выше дискретно-локального варианта минимизации невязок при удовлетворении переопределенной системы физических уравнений.

Ниже приводятся результаты расчета, полученные на основе решения 25-ти уравнений (записанных для 25 точек деформируемого объема) при 10-ти неизвестных параметрах.

Сравнение расчетных значений соответствующих компонентов определителей T1 (интенсивность касательных напряжений, рассчитанная на основе поля напряжений) и T2 (интенсивность касательных напряжений, рассчитанная на основе интенсивности скоростей деформаций сдвига и определяющей физической связи) показывает, что физические уравнения в узловых точках удовлетворяются с высокой точностью.

$$2 = \begin{bmatrix} 13.059 & 12.339 & 10.129 & 6.046 & 0.323 \\ 12.91 & 12.225 & 10.115 & 6.25 & 2.298 \\ 12.481 & 11.908 & 10.121 & 6.937 & 4.893 \\ 11.822 & 11.469 & 10.295 & 8.307 & 8.299 \\ 10.409 & 10.442 & 10.31 & 10.228 & 13.161 \end{bmatrix} \qquad T1 = \begin{bmatrix} 13.163 & 12.322 & 9.949 & 6.029 & 0.283 \\ 12.986 & 12.215 & 10.013 & 6.332 & 2.304 \\ 12.454 & 11.887 & 10.181 & 7.17 & 4.901 \\ 11.573 & 11.329 & 10.397 & 8.403 & 8.14 \\ 10.352 & 10.541 & 10.611 & 9.909 & 12.338 \end{bmatrix}$$

Величину невязки при удовлетворении физических уравнений в произвольных точках деформируемого тела характеризуют графики на рис. 2, на котором красным цветом показано значение T1, а черным T2.

Таким образом, при определении напряженного и деформированного состояний в краевых задачах обработки металлов давлением может оказаться полезным использование не только традиционных функционалов, представляющих полную мощность деформации, но и других функционалов, минимизация которых адекватна приближенному решению замкнутой системы уравнений. К таким функционалам, например, можно отнести функционалы невязок при удовлетворении физических уравнений.

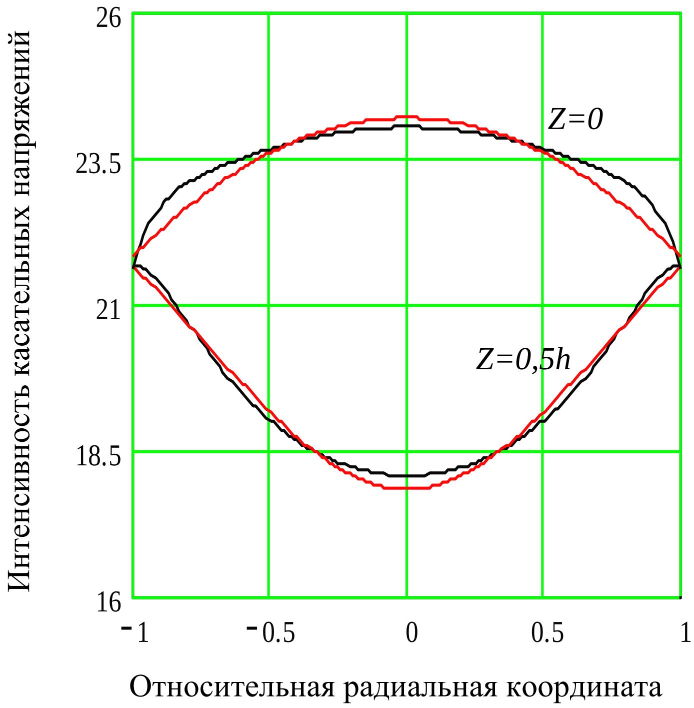

Рис. 2. К анализу минимизированной невязки
при удовлетворении физических уравнений

С целью сокращения времени расчета и повышения стабильности расчетной процедуры взамен минимизации функционалов можно рекомендовать дискретно-локальный вариант минимизации невязок при удовлетворении переопределенной системы соответствующих уравнений.

Библиографический список

1. Колмогоров, В.Л. Механика обработки металлов давлением. Учебник для вузов / В.Л. Колмогоров. – М.: Металлургия, 1986. – 688 с.

2. Михайлов, А.В. Замена функционала виртуальных скоростей и напряжений последовательностью квадратичных функционалов. Обработка металлов давлением. Межвузовский сборник. – Свердловск, изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986. – С. 19–23.

3. Писаренко, Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский Н.С. – Киев: Наукова думка. 1981. – 496 с.

4. Морозов, Е.Н. Метод конечных элементов в механике разрушения / Е.Н. Морозов, Г.П. Никишков. – М.: Наука, 1980. – 256 с.

5. Ильюшин, А.А. Метод гидродинамических приближений в журн. / А.А. Ильюшин, А.А. Поздеев и др. – 1961. – Т. 1. – Вып. 4.

6. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.

7. Ворович, И.И. О методе упругих решений / И.И. Ворович, Ю.П. Красовский // ДАН СССР. – 1959. – Т. 126. – Вып.4. – С. 740–743.

8. Быков, Д.Л. О некоторых методах решения задач теории пластичности / Д.Л. Быков // Упругость и неупругость. – М.: МГУ, 1974. – Вып. 5. – С. 119–139.

9. Биргер, И.А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности / И.А. Биргер // ПММ. – 1951. – Т. 15. – Вып. 6. – С. 765–770.

10. Степанский, Л.Г. О приближенном решении некоторых плоскодеформированных и осесимметричных пластических задач / Л.Г. Степанский, Е.П. Унксов. – Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 1.

11. Саккаев, Ю.Г. Оценка решения одной плоской задачи теории пластичности / Ю.Г. Саккаев // Инженерный журн. – 1962. – Т. 2. – Вып. 4.

12. Федотов, В.П. Определение напряженного состояния по деформированному при ковке. Обработка металлов давлением / В.П. Федотов, В.Н. Трубин, А.И. Голомидов // Межвузовский сборник. – Свердловск, изд. УПИ им. С.М. Кирова, 1986. – С. 139–144.