

УДК 531.4

## ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ ПРИ КАЧЕНИИ С ТРЕНИЕМ СКОЛЬЖЕНИЯ

*В.Г. Караваяев, Ю.Г. Прядко*

В статье анализируются динамические свойства механических систем с колесами, катящимися по шероховатым поверхностям при наличии трения скольжения. Такие свойства часто не учитываются в решениях, что приводит к ошибкам и парадоксальным выводам, о чем авторы говорят, например, в [1]. На примере одной из задач показывается, что в ходе движения системы на разных этапах возможно возникновение проскальзывания, прилипания и даже отрыва колес от основания.

Ключевые слова: динамика тела; трение скольжения; проскальзывание, общие теоремы динамики; нелинейные дифференциальные уравнения.

Опыт показывает, что некоторые ошибки возникают при решении задач динамики, связанных с движением колес по шероховатым поверхностям. Иногда такие ошибки – следствие непонимания сути происходящего процесса движения, чаще – вынужденные и объясняются невозможностью в конкретной задаче получить точное аналитическое решение.

Особенно это проявляется в нестандартных задачах, когда модули нормальных составляющих реакций поверхностей трения, а значит и максимальных сил трения скольжения меняются с течением времени. Например, если конструкция содержит колесо с прикрепленными на ободе точечными массами.

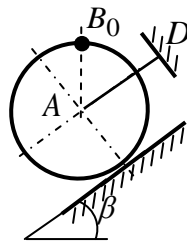


Рис. 1. О качении колеса по шероховатой поверхности

В любой из этих задач скорости и ускорения точек системы можно найти разными способами [2, 3, 4] – например, с помощью теоремы об изменении кинетической энергии или мощностей. Однако, нет гарантии, что решение верно. Более полное исследование основано на силовом анализе: отслеживании поведения нормальных составляющих реакций поверхностей трения и сил трения скольжения, полученных из дифференциальных уравнений движения центра масс системы.

При таких исследованиях, как правило, невозможно ограничиться только аналитическими выражениями. Приходится применять численные методы вычислений. Внимательный подход уточняет результаты решения задачи и иногда может привести к парадоксальным результатам.

Рассмотрим подробнее на примере качения колеса по шероховатой поверхности (рис. 1).

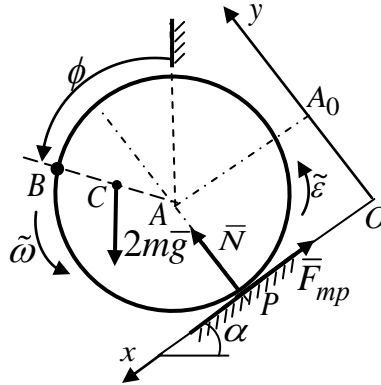


Рис. 2. Расчетная модель

Колесо в виде однородного круглого цилиндра массы  $m$  радиуса  $r$ , к обо-ду которого в верхнем положении  $B_0$  жестко прикреплен точечный груз мас-сы  $m$ . Колесо удерживается с помощью нити  $AD$  в покое в вертикальной плоскости на наклонной шероховатой поверхности (рис. 1). В некоторый мо-мент времени нить сжигается и колесо катится по поверхности без скольже-ния. Найти закон движения колеса. Трением качения пренебречь; коэффици-ент трения скольжения  $f = 0,6$ ;  $m = 5$  кг;  $r = 0,25$  м; угол  $\alpha = 30^\circ$ .

Решение

Рассмотрим движение механической системы, состоящей из цилиндра и материальной точки, после удаления нити.

На систему действуют сила тяжести  $2m\bar{g}$ , нормальная составляющая  $\bar{N}$  и сила трения скольжения  $\bar{F}_{mp}$ .

Проверка показывает, что сразу после удаления нити проскальзывания не будет, так как  $tga < f$  и система имеет одну степень свободы.

При условиях:

$$|F_{mp}| < f |N|; \quad (1)$$

$$N > 0, \quad (2)$$

колесо начнет совершать плоское движение с мгновенным центром скоростей в точке  $P$  касания колеса с наклонной поверхностью (рис. 2 соответствует произвольному моменту времени).

За обобщенную координату примем угол  $\phi$  поворота колеса. В системе координат  $Oxy$ , в которой ось  $Oy$  перпендикулярна наклонной поверхности и проходит через точку  $A_0$  - начальное положение центра масс цилиндра, координаты центра масс  $C$  рассматриваемой механической системы связаны с углом поворота колеса равенствами:

$$x_c = x_A + \frac{r}{2} \cdot \sin(\phi - \alpha) = r \cdot \phi + \frac{r}{2} \cdot \sin(\phi - \alpha);$$

$$y_c = r + \frac{r}{2} \cdot \cos(\phi - \alpha),$$

где  $x_A$  - координата центра  $A$  цилиндра.

Дифференцируя равенства по времени  $t$ , получаем проекции на оси  $Ox, Oy$  векторов скорости и ускорения точки  $C$ :

$$\dot{x}_c = r \cdot \tilde{\omega} + \frac{r}{2} \cdot \tilde{\omega} \cdot \cos(\phi - \alpha); \quad \dot{y}_c = -\frac{r}{2} \cdot \tilde{\omega} \cdot \sin(\phi - \alpha); \quad (3)$$

$$\ddot{x}_c = r \cdot \tilde{\varepsilon} - \frac{r}{2} \cdot \tilde{\omega}^2 \cdot \sin(\phi - \alpha) + \frac{r}{2} \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \cos(\phi - \alpha); \quad (4)$$

$$\ddot{y}_c = -\frac{r}{2} \cdot \tilde{\omega}^2 \cdot \cos(\phi - \alpha) - \frac{r}{2} \cdot \tilde{\varepsilon} \cdot \sin(\phi - \alpha), \quad (5)$$

где  $\tilde{\omega} = \dot{\phi}$ ,  $\tilde{\varepsilon} = \ddot{\phi}$  - алгебраические угловые скорость и ускорение колеса.

Величины скоростей центра масс  $A$  колеса и точки  $B$  соответственно равны:

$$V_A = r \cdot \omega; \quad V_B = 2r\omega \cos\left(\frac{\phi - \alpha}{2}\right).$$

Воспользуемся тем, что при отсутствии проскальзывания работа сил трения равна нулю и применение теоремы об изменении кинетической энергии системы при повороте колеса из начального положения на угол  $\phi$  приводит к аналитическим выражениям.

Кинетическая энергия системы в произвольный момент времени равна:

$$T = \frac{1}{2} m V_A^2 + \frac{1}{2} m r^2 \cdot \omega^2 + \frac{1}{2} m V_B^2 = m r^2 \omega^2 \left( 1 + 2 \cos^2 \left( \frac{\phi - \alpha}{2} \right) \right). \quad (6)$$

Работа внешних сил на этом перемещении составит:

$$\sum A_k^e = 2mgr\phi \sin \alpha + mgr(1 - \cos \phi). \quad (7)$$

Приравнявая равенства (6, 7), определяем угловую скорость колеса:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{g}{r} \cdot \frac{2\phi \sin \alpha + 1 - \cos \phi}{0.75 + 2 \cos^2 \frac{\phi - \alpha}{2}}}. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) по времени, находим угловое ускорение колеса:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{g}{2r} \cdot \frac{(2 \sin \alpha + \sin \phi)(0.75 + 2 \cos^2 \frac{\phi - \alpha}{2}) + (2\phi \sin \alpha + 1 - \cos \phi) \sin(\phi - \alpha)}{(0.75 + 2 \cos^2 \frac{\phi - \alpha}{2})^2}. \quad (9)$$

Законы изменения угла  $\phi$  в зависимости от времени получаем интегрированием равенства  $\phi(t) = \int \tilde{\omega}(\phi) dt$ , координаты  $x_A$  – из равенства:

$$x_A(t) = r\phi(t).$$

Результаты, представленные на рис. 5 и 6 получены при условии отсутствия проскальзывания в любой момент времени.

Чтобы выяснить, возможно ли проскальзывание, проведем анализ поведения функций сил  $N(\phi), F(\phi)$ . Запишем дифференциальные уравнения движения центра масс системы:

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x}_c &= 2mg \sin \alpha - F_{mp}; \\ 2m\ddot{y}_c &= N - 2mg \cos \alpha. \end{aligned} \quad (10)$$

Учитывая равенства (4, 5), получаем выражения для функций  $N(\phi)$  и  $F_{mp}(\phi)$ :

$$N(\phi) = 2mg \cos \alpha - mr\omega^2 \cos(\phi - \alpha) - mr\tilde{\varepsilon} \sin(\phi - \alpha); \quad (11)$$

$$F_{mp}(\phi) = 2mg \sin \alpha - 2mr\tilde{\varepsilon} + mr\omega^2 \sin(\phi - \alpha) - mr\tilde{\varepsilon} \cos(\phi - \alpha). \quad (12)$$

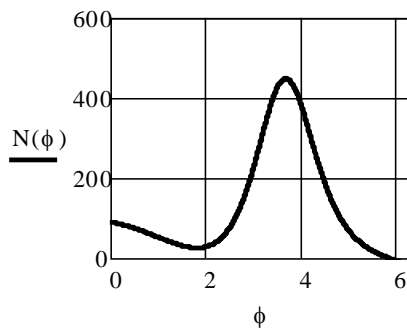


Рис. 3. Нормальная реакция

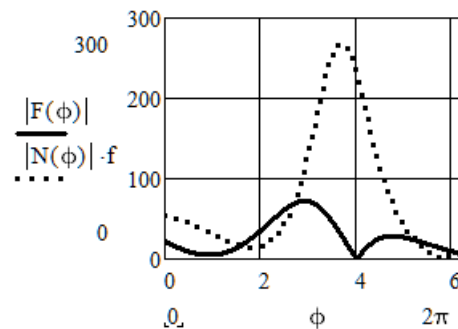


Рис. 4. Сравнение силы трения и ее максимума

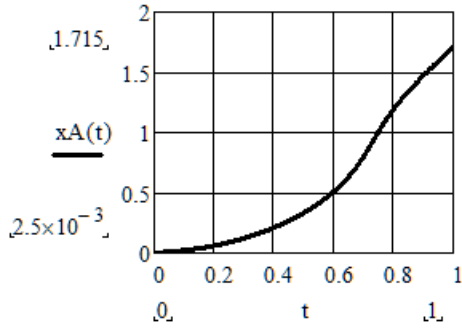


Рис. 5. Координата центра

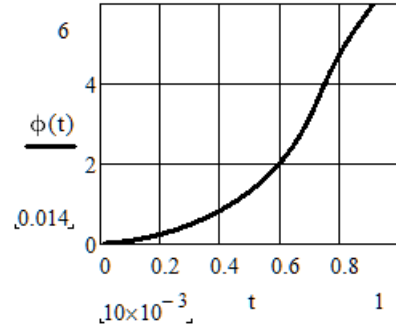


Рис. 6. Угол поворота

Ограничимся исследованием движения за время одного оборота цилиндра, то есть на интервале  $[0, 2\pi]$  изменения угла  $\varphi$ . Численный анализ, проведенный с помощью Mathcad, показывает (рис. 3,4), что на этом интервале возможны три критические точки нарушения условий (1, 2, 3). Численное определение точек пересечения приводит к следующим значениям углов:  $\varphi_1 = 1,6$  рад,  $\varphi_2 = 5,3$  рад,  $\varphi_3 = 5,9$  рад. Этим углам соответствуют значения времени  $t_1 = 0,44$  с,  $t_2 = 0,74$  с,  $t_3 = 0,8$  с.

Рассмотрим первый после начала движения случай, когда модуль силы трения скольжения превышает максимальное значение модуля силы трения, ( $\varphi_1 = 1,6$ ), устанавливаемого законом Кулона. Теперь (при проскальзывании) система обладает двумя степенями свободы. За обобщенные координаты примем угол  $\phi$  и координату  $x_A$ .

Добавим к дифференциальным уравнениям (11, 12) уравнение вращения:

$$J_{zc} \ddot{\varphi} = 0.5r N \sin(\varphi - \alpha) + r F(1 + 0.5 \cos(\varphi - \alpha)), \quad (13)$$

где  $J_{zc} = m r^2$  момент инерции механической системы относительно оси  $z_c$ ,

$$|F| = f |N|. \quad (14)$$

Опуская преобразования, получаем два дифференциальных уравнения для обобщенных координат:

$$\frac{0.5r\ddot{\varphi} \left[ \sin(\varphi - \alpha)^2 + \sin(\varphi - \alpha) f \text{Sign}(F)(1 + 0.5 \cos(\varphi - \alpha)) + 1 \right]}{0.5 \sin(\varphi - \alpha) + f \text{Sign}(F)(1 + 0.5 \cos(\varphi - \alpha))} + 0.5r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha) = g \cos \alpha; \quad (15)$$

$$\ddot{x}_A - 0.5r\dot{\varphi}^2 \cos(\varphi - \alpha) + 0.5r\ddot{\varphi} \cdot \left[ \cos(\varphi - \alpha) + \frac{f}{0.5 \sin(\varphi - \alpha) + f \text{Sign}(F)(1 + 0.5 \cos(\varphi - \alpha))} \right] = g \cos \alpha.$$

Начальные условия движения для уравнений (15):  $x_A(0.44) = 0.413$ ;  $\varphi(0.44) = 1,652$ ;  $\dot{x}_A(0.44) = 0.691$ ;  $\dot{\varphi}(0.44) = 2.764$ .

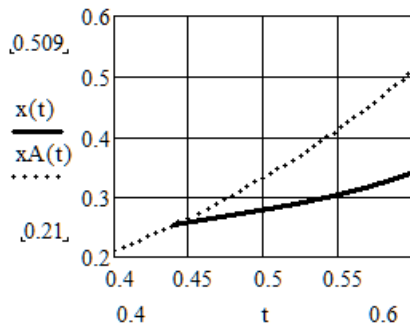


Рис. 7. Сравнение координат центра с проскальзыванием и без

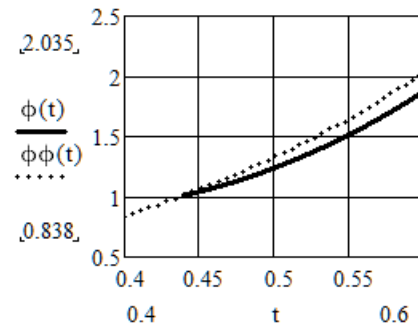


Рис. 8. Сравнение углов поворота с проскальзыванием и без

Интегрируя численно, получаем уравнения движения на интервале времени  $[0.44, 0.6]$  с. Сравнивая результаты расчетов для случая проскальзывания (сплошные кривые линии) и отсутствия проскальзывания (точечные линии) на рис. 7, 8, замечаем значительное расхождение.

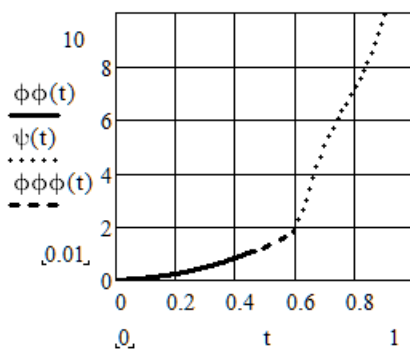


Рис. 9. Угол поворота

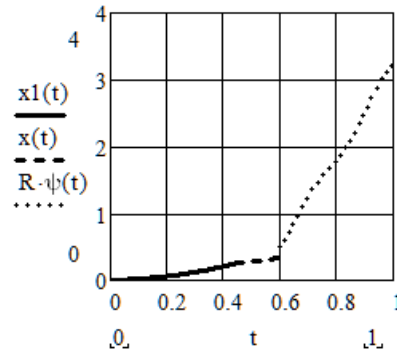


Рис. 10. Координата центра

После этого снова проверяются условия (1, 2), выявляются новые критические точки конца проскальзывания и начала нового проскальзывания. Процесс интегрирования повторяется на новом интервале времени. Изменение линейной (рис. 9) и угловой (рис. 10) координаты за одну секунду движения

соответствует трем режимам: без проскальзывания на интервале времени  $[0, 0.44]$  (сплошные линии), с проскальзыванием на интервале  $[0.44, 0.6]$  с (пунктирные линии), без проскальзывания на интервале времени  $[0.6, 1]$  с (точечная кривая).

К этим проблемам добавится случай возможного отрыва от опоры, что приведет к подпрыгиванию и последующему удару цилиндра о неподвижную поверхность. Для реализации задачи с ударом потребуется дополнительная исходная информация о свойствах цилиндра и поверхности.

#### Выводы

Опыт показывает [5], что в педагогической практике, при работе с одаренными учащимися, на олимпиадах и, конечно же, в научной деятельности постановка задач, моделирование должны сопровождаться предварительным «достаточно» полным динамическим исследованием системы. Особенно не просты такие исследования для систем с трением.

В результате неточных решений могут значительно превысить допустимый уровень. Строгое и точное решение получается только при подробном анализе каждой из ситуаций с использованием численных методов.

#### Библиографический список

1. Прядко Ю.Г. О возможных ошибках при неполных решениях ряда известных задач механики / Ю.Г. Прядко, В.Г. Караваяев // НАУКА ЮУрГУ. Материалы 66-й научной конференции. Сер. «Секции технических наук». – Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2014.
2. Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1982. – Т 1. – 352 с.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учеб. пособие для вузов по техн. специальностям: в 2 т. Т. 1: Статика и кинематика. Т. 2: Динамика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин и др. – СПб.: Лань, 2009. – 729 с.
4. Суслов, Г.К. Теоретическая механика / Г.К. Суслов. – М.–Л.: Гостехиздат, 1946. – 655 с.
5. Прядко, Ю.Г. Общетеchnическая кафедра и ее роль в подготовке конкурентно способных специалистов / Ю.Г. Прядко, С.В. Слепова // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2013. – № 11, Ч. 2. – С. 161–163.

[К содержанию](#)