

## **МЕТОДЫ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА В КОЛЬЦЕВЫХ СОПЛАХ**

*М.А. Карташева*

Исследованы методы расчета течений совершенного газа в кольцевых соплах внешнего расширения, у которых отсутствует внешняя обечайка. Рассмотрена схема течения в кольцевом сопле внешнего расширения с укороченным центральным телом. Предложены варианты использования численных методов для расчета течений в до-, трансзвуковой и сверхзвуковой областях потока. На основе предложенных методов расчета разработаны вычислительные алгоритмы для моделирования газодинамических и тяговых характеристик кольцевых сопел внешнего расширения.

Ключевые слова: кольцевое сопло внешнего расширения; расчетная область; метод установления; разностная схема.

Расчет параметров течения газа в кольцевых соплах представляет достаточно сложную задачу вследствие большего, чем в соплах Лаваля, числа газодинамических особенностей в структуре течения [1]. Тем не менее, пред-

ставляется целесообразным использовать для расчета течений в кольцевых соплах методы, развитые для расчетов течений газа в соплах Лаваля, каналах сложной геометрической формы и других газодинамических устройствах, а также для расчета параметров течения при исследовании внешнего обтекания тела. При этом предпочтение следует отдавать так называемым методам сквозного счета, позволяющим получить решение без выделения особенностей в потоке, так как, как правило, положение ударных волн, волн разрежения и контактных разрывов в поле течения кольцевого сопла заранее неизвестно. В этой связи необходимо отметить работы С.К. Годунова [2, 3], в которых предложена разностная схема первого порядка точности, основанная на решении задачи распада произвольного разрыва и получившая название схемы С.К. Годунова, работы В.П. Колгана [4, 5], в которых предложена модификация схемы С.К. Годунова, повышающая порядок схемы по пространственным переменным до двух, а также работу Тилляевой Н.И. [6], рассматривающую некоторые аспекты применения упомянутой схемы. И особо следует отметить ставшую классической монографию [7], выполненную следующим коллективом авторов: С.К. Годуновым, А.В. Забродиным, М.Я. Ивановым, А.Н. Крайко, Г.П. Прокоповым. Также следует отметить стационарный аналог схемы С.К. Годунова, разработанный М.Я. Ивановым, А.Н. Крайко, Н.В. Михайловым для расчета сверхзвуковых течений [8, 9].

Необходимо отметить, что применение упомянутых выше численных методов для расчета течений в кольцевых соплах вызывает ряд трудностей, без решения которых невозможно эффективное применение этих методов. Такие трудности связаны, прежде всего, с наличием в потоке двух обтекаемых поверхностей и большей сложностью газодинамической структуры течения. Поэтому, при применении ставших классическими для расчета течений в соплах Лаваля вычислительных алгоритмов к расчету течений в кольцевых соплах требуется соответствующая модификация (адаптация) применяемых вычислительных алгоритмов с учетом специфических особенностей течения в кольцевых соплах.

Течения в кольцевых соплах всех описанных типов имеют одну общую черту, а именно: наличие в поле течения интенсивных ударных волн и волн разрежения, положение которых внутри сопла определяется его геометрическими параметрами, параметрами рабочего тела и давлением внешней среды. Следовательно, многообразие конфигураций кольцевых сопел и условий их работы предполагает и многообразие ударно-волновых конфигураций в рассматриваемых соплах. Поэтому для проведения математического моделирования течений в кольцевых соплах целесообразно использовать численные методы, не связанные с выделением особенностей в поле течения и обеспечи-

вающие проведение «сквозного» расчета. Численные методы, в которых необходимо выделение особенностей, могут быть использованы для уточнения картины течения, в тех случаях, когда положение разрывов в потоке установлено с помощью предварительных расчетов.

В рассматриваемых геометрических конфигурациях кольцевых сопел в поле течения присутствуют дозвуковые и сверхзвуковые области (расчетная область кольцевого сопла представлена на рис. 1).

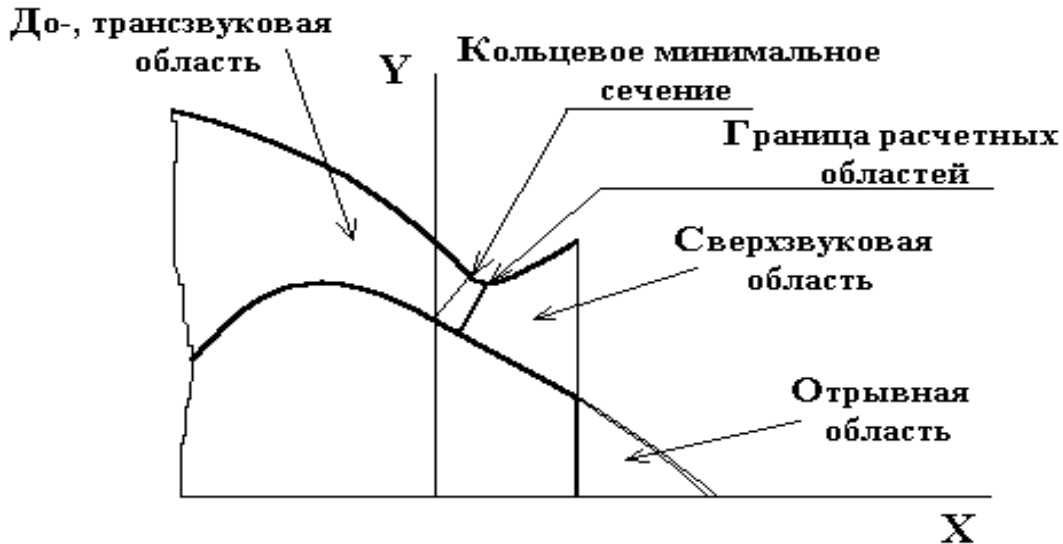


Рис. 1. Расчетная схема кольцевого сопла

Область перехода потока через скорость звука будем рассматривать как область трансзвукового течения. Сложность расчета поля течения в кольцевом сопле обусловлена тем, что все три области течения: до-, транс-, сверхзвуковая расположены во внутреннем объеме сопла не последовательно, как в сопле Лаваля, а более сложным образом: три области течения могут чередоваться друг с другом и быть распределены по внутреннему объему сопла нерегулярно, что определяется геометрическими параметрами сопла и условиями его работы.

Течение газа в кольцевом сопле представляет собой двумерное осесимметричное течение. Нестационарная система уравнений газовой динамики, описывающая осесимметричное течение невязкого газа, в интегральной форме имеет следующий вид [10]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} y \rho dx dy + \oint_{\Gamma} y \rho (u dy - v dx) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} y \rho u dx dy + \oint_{\Gamma} y ((\rho u^2 + p) dy - u v dx) &= 0; \\
 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} y \rho v dx dy + \oint_{\Gamma} y (\rho u v dy - (\rho v^2 + p) dx) &= \iint_{\sigma} p dx dy; \\
 \frac{\partial}{\partial t} \iint_{\sigma} y \rho \left( e + \frac{V^2}{2} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} y \rho \left( \frac{p}{\rho} + e + \frac{V^2}{2} \right) (u dy - v dx) &= 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\rho$  – плотность газа;

$p$  – давление газа;

$u, v$  – осевая и радиальная компоненты вектора скорости  $\vec{V}$ ;

$x, y$  – осевая и радиальная координаты;

$e = \frac{1}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}$  – удельная внутренняя энергия газа;

$t$  – время;

$\sigma$  – произвольная замкнутая область в плоскости  $X, Y$  с границей  $\Gamma$ .

Вопрос о количестве граничных условий для рассматриваемой системы уравнений решается на основе анализа ее характеристических свойств. На стенках ставится условие непротекания  $V_n=0$ ; на границе струи задается давление  $p = p_n$ ; на входной дозвуковой границе должны быть поставлены три граничных условия, в качестве которых используется постоянство энтропии  $S = \text{const}$ , полной энтальпии  $H_o = \text{const}$ , распределение угла наклона вектора скорости  $\Theta_* = \Theta_*(x, y)$ . На сверхзвуковой входной границе необходимо задание всех параметров течения. Выходная граница выбирается таким образом, чтобы нормальная к границе составляющая скорости была сверхзвуковой. Граничных условий в этом случае не требуется.

В качестве уравнения состояния рассматриваемого газа принято уравнение состояния совершенного газа:

$$p = \rho RT. \tag{2}$$

Основной задачей, стоящей перед исследователем, является разработка вычислительного алгоритма расчета течений, который бы позволял наиболее эффективно решать задачу определения структуры течения в рассматриваемой расчетной области. В понятие «эффективность» следует включить как вполне естественные при решении задачи численным методом требования устойчивости разностной схемы, ее сходимости, обладание требуемым порядком точности, так и требования, связанные непосредственно с объектом исследования. В рассматриваемом случае исследования течений в кольцевых соплах такими требованиями являются способность вычислительного алгоритма к «сквозному» расчету поля течения вследствие предполагаемой сложности картины течения и достаточно малое время расчета, связанное с тем, что программу расчета поля течения предполагается использовать для нахождения оптимальных кольцевых сопел в составе пакета прикладных программ. При этом процедура оптимизации предполагает многократные расчеты поля течения в оптимизируемом объекте.

Построение вычислительного алгоритма расчета течений в кольцевых соплах может быть осуществлено с использованием известных и хорошо себя зарекомендовавших для расчета течений в соплах Лаваля методов и разностных схем. Однако, использование этих методов в той постановке, в какой они используются в соплах Лаваля, не представляется возможным вследствие существенных различий в геометрических конфигурациях кольцевого сопла и сопла Лаваля, что обуславливает и различия в газодинамической структуре потока рассматриваемых сопел. Поэтому, в процессе разработке вычислительного алгоритма расчета течения в кольцевом сопле необходима соответствующая модификация (адаптация) известных численных методов и разностных схем, то есть, необходима новая постановка задачи математического моделирования течения в рассматриваемом кольцевом сопле.

Расчет поля течения в кольцевом сопле представляет собой расчет смешанного течения, так как в поле течения кольцевых сопел имеются зоны дозвукового и сверхзвукового течения. В этом случае стационарные уравнения газовой динамики являются уравнениями смешанного типа: эллиптическими в дозвуковой зоне и гиперболическими в сверхзвуковой зоне, причем местоположение и геометрическая конфигурация поверхностей, разделяющих эти зоны (а в поле течения кольцевого сопла их может быть несколько) заранее неизвестны. Численный расчет течения в рассмотренном случае наталкивается на две взаимосвязанные трудности: необходимо применение различных численных методов в областях, расположение которых заранее неизвестно. Для разрешения этих трудностей целесообразно использовать метод установления [11], заключающийся в рассмотрении нестационарного физического процесса и его установления по времени (решении стационарной задачи

с помощью нестационарной). Введение временной координаты означает переход к гиперболической системе уравнений, справедливой во всех областях рассматриваемого течения, для решения которой применяется один численный метод.

Решение данной нестационарной системы сходится с течением времени к решению стационарной задачи. В связи с этим важное значение имеет выбор критерия установления, по которому можно судить о достижении искомого результата. В качестве такого критерия целесообразно использовать постоянство какой-либо интегральной характеристики течения на определенном временном промежутке. В случае кольцевого сопла одним из таких критериев может быть постоянство давления на поверхностях сопла, так как именно интеграл давления по поверхностям сопла определяет его тяговую характеристику (в зависимости от поставленной цели расчета могут быть использованы и другие критерии установления).

Алгоритм расчета смешанных течений идеального газа в кольцевых соплах построен на основе общего подхода к численному решению задач газовой динамики, предложенного в работе С.К. Годунова, А.В. Забродина, М.Я. Иванова, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопова «Численное решение многомерных задач газовой динамики» [7], а также на методах, изложенных в работах [12, 13]. Данный подход основан на методе С.К. Годунова, предложенном в работе [2].

Рассматриваемая разностная схема имеет первый порядок точности по пространству и времени, что, вообще говоря, не в полной мере удовлетворяет задаче моделирования течений в кольцевых соплах ввиду многообразия и геометрической сложности волновых структур, так как в этом случае требуется повышенная точность расчета. Кроме того, известно, что схема [7] в ее первоначальном варианте не совсем адекватно описывает разрывы параметров различных типов (ударные волны, волны разрежения, контактные разрывы) используя решение одной задачи о распаде разрыва при определении параметров газа в ячейке разностной сетки.

Поэтому в данной работе для расчета параметров кольцевых сопел использована модификация В.П. Колгана схемы [7], имеющая второй порядок точности по пространственным переменным и более точно описывающая параметры газа при рассмотрении разрывов параметров газа в поле течения [4, 5]. Данная модификация построена с применением принципа минимальных значений производной к построению разностной схемы. В работе также использованы идеи, представленные в работе Н.И. Тилляевой [6], представляющие некоторые аспекты практического применения модификации [4, 5] схемы [7] для произвольных нерегулярных расчетных сеток.

Выбор схемы [7] с модификацией [4, 5] обусловлен точностью данного метода, его надежностью (в смысле обеспечения сходимости и устойчивости используемой разностной схемы) и апробированностью для расчета смешанных течений в соплах [13, 14, 15].

Особенности постановки задачи математического моделирования течений в кольцевых соплах связаны с наличием в потоке сложной ударно-волновой структуры, состоящей из достаточно близко расположенных ударных волн и волн расширения. Поэтому при расчетах течения в кольцевых соплах особого внимания требует построение разностной сетки, которая должна позволить с достаточной точностью определить местоположение указанных выше волновых структур.

В качестве алгоритма построения разностной сетки рассмотрена процедура построения приближенно ортогональных разностных сеток. Ортогонализация сетки проводится с помощью решения уравнений Лапласа. Разностная сетка может быть задана с помощью фиксированных в пространстве узлов сетки либо с помощью алгоритма построения подвижной разностной сетки, расположение узлов в которой определяется характером течения (например, организуется сгущение узлов разностной сетки в областях разрывов, там, где градиенты газодинамических параметров имеют значительные величины). Для расчета течений в кольцевых соплах в рамках настоящего исследования используются подвижные разностные сетки, что позволяет существенно снизить время расчета одного варианта поля течения и одновременно повысить точность определения параметров течения. Особенностью применяемого алгоритма является одновременное перераспределение узлов, составляющих координаты центрального тела и внешней обечайки. При этом в ряде случаев возможны как существенная деформация ячеек сетки, так и перехлест линий, образующих сетку, что приводит к невозможности продолжения расчета. Для того, чтобы избежать возникновения такой ситуации, при каждом перестроении разностной сетки использован алгоритм проверки возможности ортогонализации ячеек разностной сетки.

Для расчета параметров сверхзвукового течения в кольцевых соплах в случаях, когда заранее известен характер течения, используется разностная схема М.Я. Иванова – А.Н. Крайко – Н.В. Михайлова, являющаяся стационарным аналогом схемы С.К. Годунова. В данной работе использовано обобщение схемы М.Я. Иванова – А.Н. Крайко – Н.В. Михайлова, необходимость использования которого связана с тем, что в кольцевых соплах направление, вдоль которого скорость течения больше скорости звука, в общем случае не совпадает с осью симметрии потока. Как правило, в кольцевом сопле в поле течения присутствует значительная радиальная компонента скорости (причем

она может быть направлена как к оси сопла, так и в противоположном направлении). Такая особенность течения газа в кольцевом сопле требует вычисления осевой и радиальной компонент вектора скорости и проверки наличия сверхзвукового течения в направлении, перпендикулярном выходной границе расчетной области сопла.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе указанных расчетных методов разработаны вычислительные алгоритмы, позволяющие проводить расчеты течений в кольцевых соплах без предварительного выделения особенностей и определить газодинамические параметры потока и тяговые характеристики кольцевого сопла. Основное отличие представляемых вычислительных алгоритмов от применяемых ранее – их модификация в части построения разностной сетки и постановки граничных условий. Такие различия обусловлены особой геометрией расчетной области кольцевого сопла: наличием двух обтекаемых поверхностей и сложной искривленной геометрией расчетной области, что приводит к наличию в исследуемом потоке значительных градиентов газодинамических параметров и необходимости «подстраивать» разностную сетку под особенности течения.

## Библиографический список

1. Карташев, А.Л. Математическое моделирование течений в кольцевых соплах / А.Л. Карташев, М.А. Карташева. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 158 с.
2. Годунов, С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С.К. Годунов // Матем. сб. – 1959. – № 47. – Вып. 3. – С. 271–306.
3. Годунов, С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
4. Колган, В.П. Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики / В.П. Колган // Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – Т. 3. – № 6. – С. 68–77.
5. Колган, В.П. Конечно-разностная схема для расчета двумерных разрывных решений нестационарной газовой динамики / В.П. Колган // Уч. зап. ЦАГИ. – 1975. – Т. 6. – № 1. – С. 9–14.
6. Тилляева, Н.И. Исследование возможностей модификации В.П. Колгана численной схемы С.К. Годунова, сохраняющей аппроксимацию на произвольных расчетных сетках / Н.И. Тилляева // Технический отчет ЦИАМ № 9860. Москва, 1982. – 46 с.



7. Численное решение многомерных задач газовой динамики / С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов и др. – М.: Наука, 1976. – 400 с.
8. Иванов, М.Я. Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений / М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Н.В. Михайлов // ЖВМ и МФ. – 1972. – Т. 12. – № 2. – С. 441–463.
9. Иванов, М.Я. Метод сквозного счета двумерных и пространственных сверхзвуковых течений / М.Я. Иванов, А.Н. Крайко // ЖВМ и МФ. – 1972. – Т.12. – № 3. – С. 805–813.
10. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами / Л.Е. Стернин, Б.Н. Маслов, А.А. Шрайбер и др. – М.: Машиностроение, 1980. – 176 с.
11. Годунов, С.К. Разностная схема для двумерных нестационарных задач газовой динамики и расчет обтекания с отошедшей ударной волной / С.К. Годунов, А.В. Забродин, Г.П. Прокопов // ЖВМ и МФ. – 1961. – Т. 1. – № 6. – С. 1020–1050.
12. Иванов, М.Я. Численное решение прямой задачи о смешанном течении в соплах / М.Я. Иванов, А.Н. Крайко // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1969. – № 5. – С. 77–83.
13. Иванов, М.Я. Расчет смешанного течения газа в соплах / М.Я. Иванов, А.Н. Крайко // Труды секции по численным методам в газовой динамике 2-го Международного коллоквиума по газодинамике взрыва и реагирующих систем. – Новосибирск. – 1969. – Т. 2. – М.: ВЦ АН СССР. – 1971. – С. 3–26.
14. Исследование нерасчетных режимов регулируемого тарельчатого сопла / Ю.В. Гора, Л.З. Гребенюк, Н.Д. Коваленко и др. // Динамика насосных систем. Киев: Наукова думка, 1980. – С. 137–144.
15. Гора, Ю.В. Численное исследование течения идеального газа в трансзвуковой области кольцевого сопла с подвижной обечайкой / Ю.В. Гора // Динамика насосных систем. – Киев: Наукова думка, 1980. – С. 152.

[К содержанию](#)