

УДК621.316.3.08

## ОЦЕНКА ДИНАМИКИ ВАФЕЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

*Е.С. Онучин, Ю.М. Хищенко*

Решены задачи линейной динамики элементов вафельной цилиндрической оболочки, проведен качественный анализ результатов, сделаны выводы о необходимости использования нелинейной теории для получения корректного поведения конструкции, проведен качественный анализ уравнений нелинейной динамики стержня и оболочки.

Ключевые слова: поперечный удар, динамическая устойчивость, тонкостенная подкрепленная конструкция, параметрический резонанс.

В качестве объекта исследования выберем цилиндрическую вафельную оболочку, имеющую следующую геометрию вафельной клетки (рис. 1).

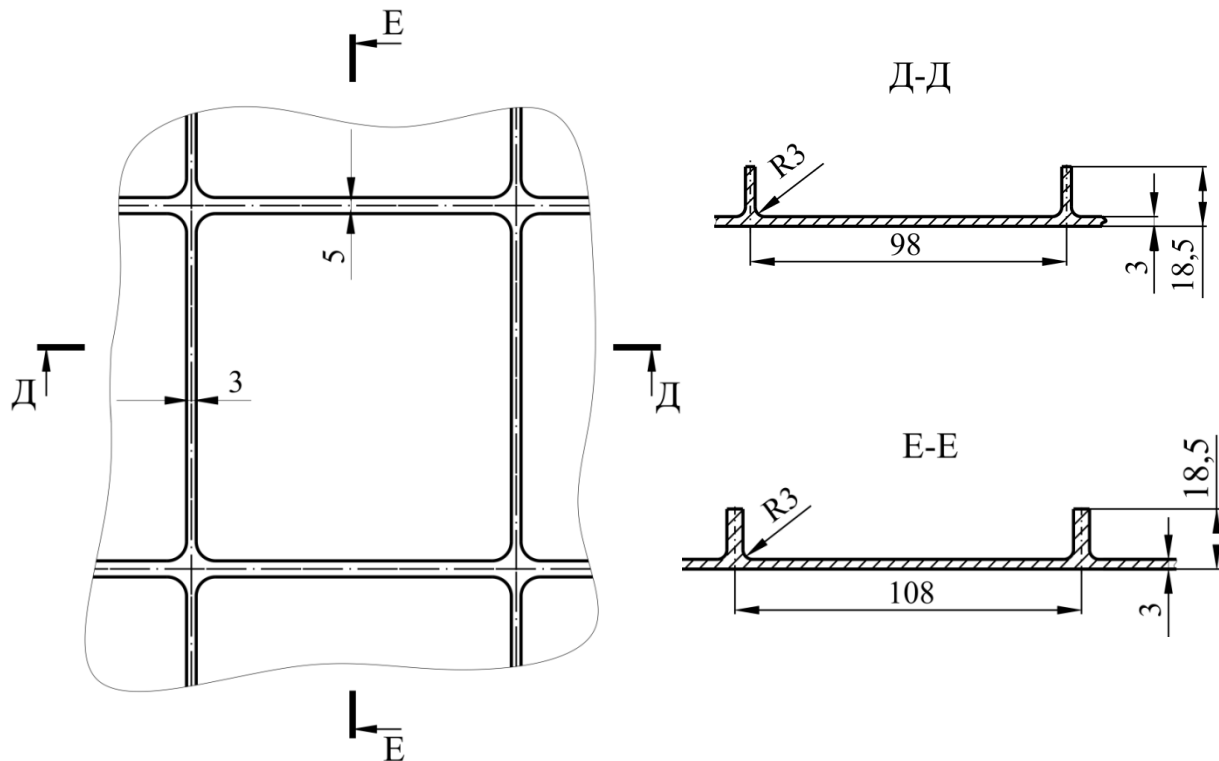


Рис. 1. Геометрия вафельной клетки

Для исследования динамики цилиндрической вафельной оболочки, с целью получения аналитического решения, удобного для анализа, разобьем конструкцию на составляющие её элементы: стержни силового набора и плотно вафельной клетки.

Для исследования ударного взаимодействия воспользуемся соотношениями контактной теории Герца, аппроксимируя ударный импульс во времени полуволной синуса:

$$p = p_0 \sin \frac{\pi t}{\tau}. \quad (1)$$

где  $p_0$  – амплитуда контактного давления,  $\tau$  – время действия ударной нагрузки.

Рассмотрим линейную задачу динамического поведения сжатой пластины при ударном воздействии.

Дифференциальное уравнение движения прямоугольной пластины постоянной толщины, нагруженной силами в ее плоскости и импульсной поперечной нагрузкой по части ее поверхности, имеет вид [2]:

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, y, t) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (2)$$

где  $w(x, y, t)$  – прогибы пластинки;  $D$  – цилиндрическая жесткость;  $h$  – толщина;  $N_x, N_y$  – погонные силы, действующие в плоскости пластинки;  $p(x, y, t)$  – поперечное давление.

Пластина нагружается равномерно распределенной по поверхности прямоугольника со сторонами  $u$  и  $v$  поперечной нагрузкой, координаты центра которого  $\xi$  и  $\eta$ . Сама пластина имеет размеры  $a$  и  $b$  вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно. Пластина также нагружается силами  $N_x$  и  $N_y$ , действующими в ее плоскости (рис. 2). В качестве граничных условий примем шарнирное опирание.

Решение дифференциального уравнения движения пластины будем искать в виде разложения по собственным формам колебаний [2]:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn}(t) \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3)$$

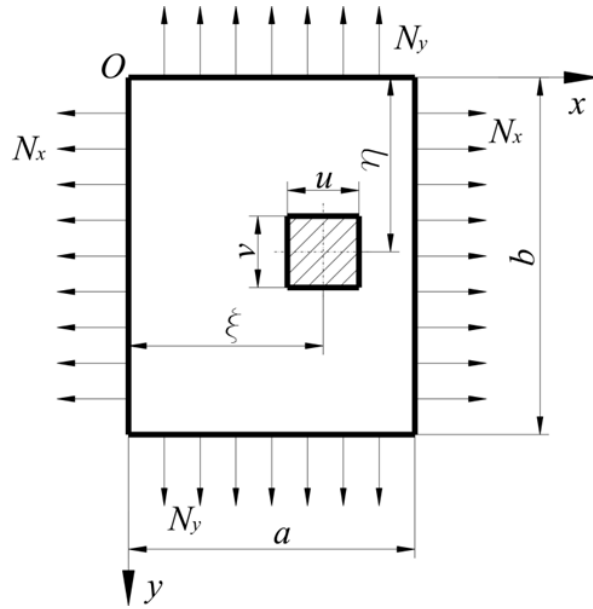


Рис. 2. Расчетная схема пластины, нагруженной силами в ее плоскости и поперечной нагрузкой

Выражение для коэффициентов  $w_{mn}$  примет вид [2]:

$$w_{mn}(t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{p_{mn}}{\rho h}}{\left( \lambda_{mn}^2 - \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right)} \left( \sin \left( \frac{\pi t}{\tau} \right) - \frac{\left( \frac{\pi}{\tau} \right)}{\lambda_{mn}} \cdot \sin(\lambda_{mn} \cdot t) \right), t \leq \tau \\ - \frac{\frac{p_{mn} \pi}{\rho h \tau}}{\lambda_{mn} \left( \lambda_{mn}^2 - \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right)} \left( \sin(\lambda_{mn} \cdot (t - \tau)) + \sin(\lambda_{mn} \cdot t) \right), t > \tau \end{array} \right\}, \quad (4)$$

где коэффициенты  $p_{mn}$  и  $\lambda_{mn}$  определяются по формулам:

$$p_{mn} = \frac{16p}{\pi^2 mn} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{n\pi v}{2b}; \quad (5)$$

$$\lambda_{mn}^2 = \frac{\pi^2}{\rho h} \left[ D\pi^2 \cdot \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + N_x \frac{m^2}{a^2} + N_y \frac{n^2}{b^2} \right]. \quad (6)$$

Исследуем зависимость динамических прогибов шарнирно опертой пластины, соответствующей полотну вафельной клетки рассматриваемой оболочки. Используя подход, изложенный в [2], получим следующие результаты:

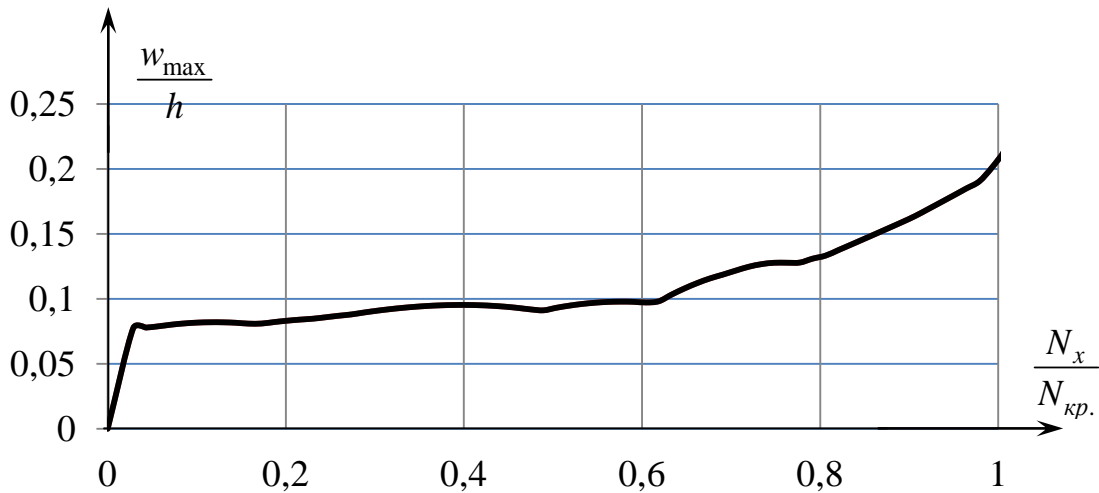


Рис. 3. Зависимость максимального динамического прогиба от сжимающего усилия при скорости ударника  $V=10$  м/с

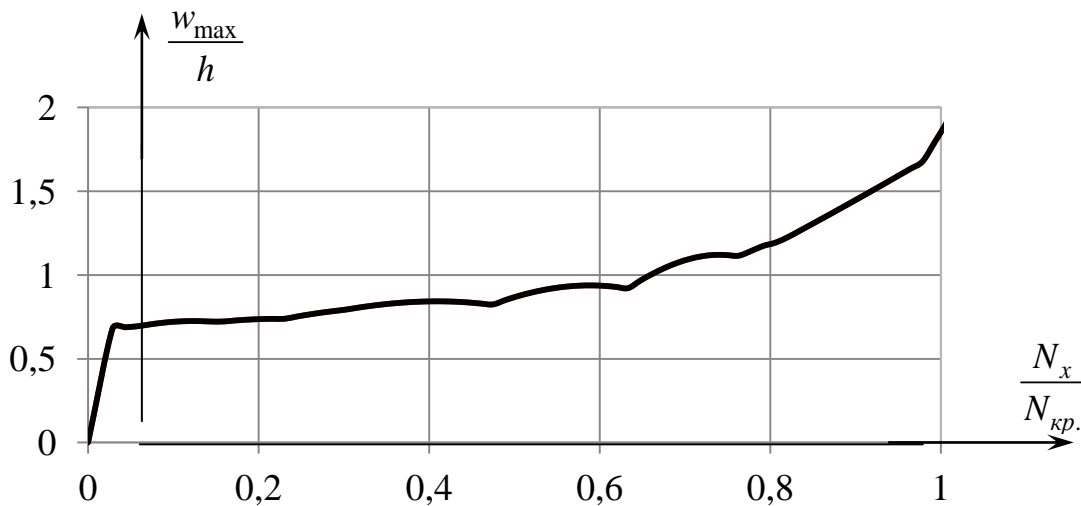


Рис. 4. Зависимость максимального динамического прогиба от сжимающего усилия при скорости ударника  $V=30$  м/с

Из сравнения полученных графиков видно, что при приближении к критическому значению сжимающей силы прогибы значительно возрастают, но момент большого возрастания прогибов не зависит от интенсивности ударного воздействия. Теоретически при сжимающей нагрузке, равной критической, прогибы должны стать бесконечными, что видно из того, что коэффициент  $\lambda_{mn}$  обращается в нуль, что приведет к появлению бесконечно больших членов в ряде коэффициентов прогиба. Это фактически соответствует потере устойчивости пластины.

Рассмотрим линейную задачу динамического поведения шарнирно опертого стержня при поперечном ударе.

Изогнутую форму стержня представим в виде разложения по собственным формам колебаний:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot X_n(x), \quad (7)$$

где  $w$  – прогиб стержня, как функция времени и координаты,  $X_n(x)$  –  $n$ -ая форма собственных колебаний стержня, удовлетворяющая условиям закрепления,  $T_n(t)$  – соответствующие  $n$ -ой форме колебаний искомые функции времени. Для сжатого шарнирно опертого стержня формы собственных колебаний имеют вид:

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (8)$$

Для решения задачи воспользуемся динамической моделью Тимошенко. Анализ уравнения проведем, используя метод Бубнова-Галеркина. Использование модели, учитывающей сдвиговые деформации, обосновывается тем, что в случае исследования динамики силового набора мы имеем дело с короткими стержнями, для которых вклад сдвига в общие перемещения становится значительным.

Податливость стержня для случая жесткой заделки обоих концов:

$$\frac{1}{c_1} = \frac{l^3}{192EI} + \frac{1,2l}{4GF}. \quad (9)$$

Податливость стержня для случая шарнирного опирания концов:

$$\frac{1}{c_2} = \frac{l^3}{96EI} + \frac{1,2l}{4GF}. \quad (10)$$

Например, для рассматриваемого стрингерного ребра (рис. 1) в случае жесткой заделки сдвиговые перемещения составляют 27 % от изгибных, а в случае шарнирного опирания – 13 %.

Поперечную нагрузку будем считать равномерно распределенной по длине  $b$  в середине балки. Форму импульса нагружения примем в виде полуволны синуса:

$$p = p_0 \sin \frac{\pi t}{\tau}. \quad (11)$$

Уравнение динамической модели Тимошенко [3] с учетом сжимающего усилия имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho I \left( 1 + \alpha \frac{E}{G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\alpha \rho^2 I}{G} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \rho S \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t) - \alpha \frac{EI}{GF} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\alpha \rho I}{GF} \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial t^2}. \quad (12)$$

После применения процедуры Бубнова-Галеркина для первой формы колебаний получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение относительно искомой функции времени (независимо от количества учитываемых форм уравнения для функций  $T_n(t)$  будут независимыми):

$$T_1^{IV} \frac{\alpha \rho^2 I}{G} + \ddot{T}_1 \left( \rho I \left( 1 + \alpha \frac{E}{G} \right) \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \rho S \right) + T_1 \frac{\pi^2}{l^2} \left( P + EI \frac{\pi^2}{l^2} \right) = p_0 \frac{4}{\pi} \left( 1 - \frac{\alpha \rho I}{GF} \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^2 \right) \sin \frac{\pi b}{2l} \sin \frac{\pi t}{\tau}; \quad (13)$$

Характеристическое уравнение будет иметь вид:

$$\gamma \lambda^4 + \beta \lambda^2 + \delta = 0, \quad (14)$$

где  $\gamma = \frac{\alpha \rho^2 I}{G}$ ,  $\beta = \left( \rho I \left( 1 + \alpha \frac{E}{G} \right) \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 + \rho S \right)$ ,  $\delta = \frac{\pi^2}{l^2} \left( P + EI \frac{\pi^2}{l^2} \right)$ .

Отсюда  $\lambda^2 = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\gamma\delta}}{2\gamma}$ . Полученные значения квадрата корня ха-

рактеристического уравнения будут положительными при  $P \leq -EI \frac{\pi^2}{l^2}$ .

То есть при сжимающей нагрузке, превышающей значение статической критической нагрузки, будут возникать экспоненциальные корни, приводящие к неограниченному возрастанию прогибов.

Качественный анализ результатов показывает, что исследование динамического поведения элементов вафельной конструкции с помощью линейной теории дает весьма ограниченную информацию о поведении конструкции:

приведенный выше подход позволяет оценить динамические прогибы, деформации и перемещения, но не дает качественного описания явлений динамической потери устойчивости. Также не отмечается никакого взаимовлияния поперечной ударной нагрузки на величину критического сжимающего усилия. Целесообразно, для понимания физической сущности подобных явлений провести нелинейный анализ простого объекта – шарнирно опертой стойки. Уравнения, получаемые для данного объекта, более наглядны и просты для исследования.

Качественное исследование уравнений показывает, что искомое явление носит характер параметрического резонанса, возникающего вследствие взаимодействия продольных и поперечных волн деформации в стержне. Система уравнений динамики стержня, учитывающих поперечное ударное воздействие и действие постоянной сжимающей нагрузки, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left(1 - \frac{P_0}{nFG}\right) - \left(\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{P_0}{nFG}\right) + \frac{1}{c_1^2}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \\ & + \frac{1}{c^2 c_1^2} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{P_0}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{i^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i^2} \frac{3}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ & = \frac{1}{c^2} \frac{1}{nFG} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{nFG} \frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2} + \frac{q(x,t)}{EI}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из качественного анализа слагаемых, входящих в уравнения можно сделать вывод, что поперечные колебания являются нелинейным источником продольных волн деформации (15), которые в свою очередь параметрическим образом влияют на поперечные колебания, так как в (16) функции продольных перемещений входят перед функциями поперечных перемещений в виде параметра. Это позволяет сделать вывод, что ожидаемая потеря несущей способности конструкции при ударном воздействии физически представляет собой внутренний параметрический резонанс и предположительно должна проявиться в большом возрастании прогибов при сжимающей нагрузке меньшей ее статического критического значения. Подобные (15, 16) уравнения приводятся в [4]. Приведенные в [4] результаты расчетов позволяют наглядно увидеть, что продольные волны могут возбуждать поперечные колебания стержня и приводить к динамическому выпучиванию. Наиболее полный вариант нелинейных уравнений динамики стержней приведен в [5]. Уравнение (16) отличается от приве-

денного в [4] дополнениями в виде учета постоянной сжимающей силы и поперечного распределенного воздействия, что позволяет рассмотреть задачу нелинейной динамики сжатого стержня при поперечном ударном воздействии, который является моделью стрингера сжатой вафельной оболочки.

Предполагаемый вид движения отличается от внешних резонансов тем, что по своей сути оно является следствием взаимодействия продольных и поперечных волн деформации конструкции. Решение задачи параметрического возбуждения поперечных колебаний периодически изменяющейся нагрузкой рассмотрено в [6] для стержня и в [7] для гладкой цилиндрической оболочки, но в нашем случае имеет место возбуждение поперечных колебаний за счет продольных волн деформации, в свою очередь возбуждаемых поперечным ударом.

В случае оболочечной конструкции будет сказываться влияние и окружающих волн, которые аналогично продольным волнам параметрическим образом возбуждают поперечные колебания. Это видно из уравнений для колебаний гладкой оболочки в перемещениях [7]. Подчеркнутые слагаемые в (19) описывают взаимное влияние волн деформации и их параметрическое взаимодействие:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\mu}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ & + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_x - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \\ & + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu^2}{Eh} p_y - \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \frac{h^2}{12} \nabla^4 w - \frac{\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R^2} - \frac{\mu}{2R} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2R} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\mu}{R} w \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial w}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R} w \right) + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \\ & - \frac{1-\mu^2}{Eh} q + \rho \frac{1-\mu^2}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$



Из этих уравнений видно, что физически ситуация аналогична явлениям в стержнях.

Резонансное движение может иметь место при определенном соотношении параметров, входящих в уравнение, но получение границ областей неустойчивости связано с математическими трудностями. Для получения областей неустойчивости конструкции необходимо либо преодолеть громоздкость систем уравнений и перебором параметров получить примерные результаты, либо методами качественного анализа нелинейных уравнений получить искомые области изменения параметров.

По результатам анализа требуется установить, будет ли влияние предполагаемого явления значительным для исследуемой конструкции, и в каких условиях его стоит опасаться и учитывать.

#### Библиографический список

1. Андреев, Л.В. Динамика тонкостенных конструкций с присоединенными массами / Л.В. Андреев, А.И. Станкевич, А.Л. Дышко, И.Д. Павленко. – М.: Издательство МАИ, 1995. – 209 с.
2. Меркурьев, А.В. Пластинка под действием импульсной поперечной нагрузки и сил в ее плоскости / А.В. Меркурьев // Труды центрального аэрогидродинамического института имени профессора Н.Е. Жуковского. Расчеты напряженно-деформированного состояния и рациональное проектирование авиационных конструкций: Сборник статей. – М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1992. – 346 с.
3. Ершов, Н.Ф. Прочность судовых конструкций при локальных динамических / Н.Ф. Ершов. – Л.: Судостроение, 1989. – 200 с.
4. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – 2-е изд. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
5. Ерофеев, В.И. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность / В.И. Ерофеев, В.В. Кажаяев, Н.П. Семерикова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208 с.
6. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. – 593 с.
7. Кубенко, В.Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек: Учебное пособие / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Н.П. Подчасовой. – К.: Выща шк. Головное изд-во, 1989. – 208 с.

[К содержанию](#)