

УДК 532.135 + 621.822.5

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ СМАЗКИ ПОДШИПНИКОВ СКОЛЬЖЕНИЯ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ

Е.А. Задорожная, В.Г. Караваяв

В статье рассмотрены методика и алгоритм расчета задачи смазки сложнонагруженных опор скольжения в неизотермической постановке, а также методика расчета гидромеханических характеристик трибосопряжения с учетом неньютоновских свойств жидкости, процессов теплообмена между смазочным слоем и окружающими его подвижными поверхностями. Приведены результаты расчета шатунного подшипника теплового двигателя.

Ключевые слова: опора скольжения; уравнение энергии; уравнение Рейнольдса; неньютоновские свойства жидкости.

Введение. Проблема повышения надежности и долговечности узлов трения машин и механизмов всегда являлась и остается одной из основных задач современного машиностроения. Развитие технологии и производства, возрастание требований к увеличению мощности тепловых машин, одновременно с ростом требований к долговечности и топливной экономичности, приводит к повышению нагруженности отдельных трибосопряжений (ТС) и всего механизма в целом. В этом плане очень распространенной и актуальной остается проблема разработки методологии, обеспечивающей правильный выбор направлений исследования, методов решения поставленных задач, а также создания методов физического, математического и комбинированного моделирования процессов трения и изнашивания узлов трения.

Современное машиностроение базируется на наукоемких технологиях. В настоящее время уровень развития вычислительных методов и компьютерных технологий позволяет инженерам и исследователям при моделировании и расчете ТС различных машин учитывать целый ряд конструктивных, технологических, режимных и других параметров, влияющих на характеристики узлов трения. Основные из них представлены на рисунке 1. Особое внимание обычно уделяется геометрическим параметрам ТС и виду его нагружения.

Однако, современные смазочные материалы (СМ), используемые в сложнонагруженных узлах трения, загущены различными присадками, что ведет к значительному изменению условий работы подшипников скольжения. В некоторых случаях это приводит к уменьшению толщины смазочной пленки до уровня микрочастиц, находящихся в смазке, или до величины микронеровностей на поверхностях трения.

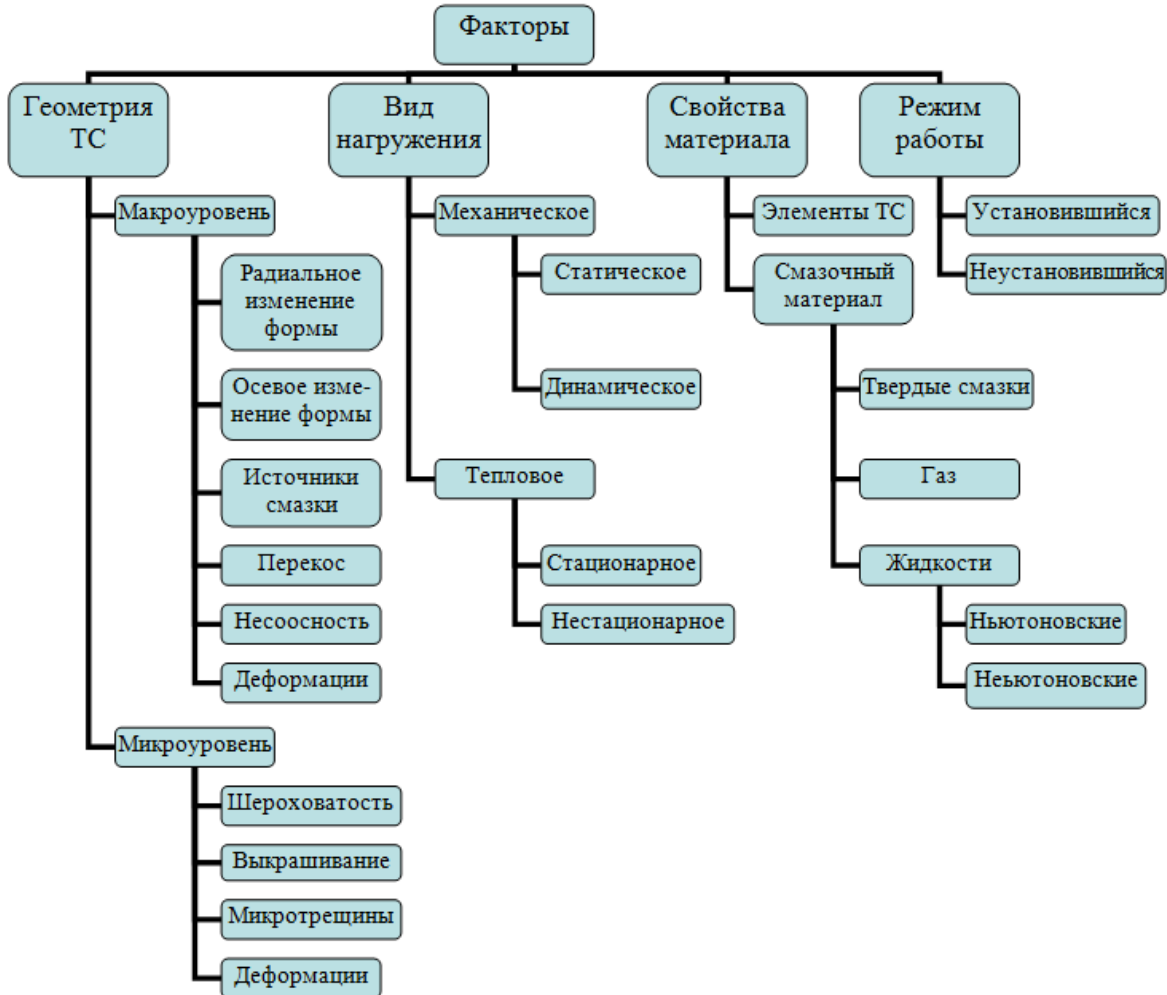


Рис. 1. Факторы, влияющие на гидромеханические характеристики сложнонагруженных трибосопряжений

С другой стороны наличие присадок может способствовать увеличению толщины смазочного слоя и одновременно ведет к повышению затрат мощности на трение в подшипниковом узле. В частности, большое влияние на свойства СМ, в первую очередь на вязкость, оказывают полимерные добавки, твердые частицы порошкообразных присадок или продукты износа, а также микро-пузырьки, присутствующие в масле. Поэтому при исследовании работоспособности основных ТС необходимо учитывать изменение реологических свойств смазочных жидкостей и их влияние на гидромеханические характеристики (ГМХ) сложнонагруженных ТС жидкостного трения.

Наряду с этим, большое значение при исследовании работоспособности трибосопряжений имеют тепловые процессы, происходящие в сложнонагруженном подшипнике жидкостного трения. Обычно их рассматривают на основе решения обобщенного уравнения энергии (теплопереноса) для тонкого

слоя вязкой несжимаемой жидкости между двумя произвольно движущимися поверхностями. Оно учитывает как конвективный перенос теплоты, осуществляемый смазкой, так и перенос теплоты посредством теплопроводности.

Таким образом, целью настоящего исследования является решение задач динамики ТС с учетом распределения температур в смазочном слое, неньютоновских свойств СМ и геометрии поверхностей трения, ограничивающих тонкий смазочный слой.

Методика решения. Для решения поставленной задачи рассматривалась круглоцилиндрическая радиальная опора жидкостного трения, в которой подшипник (втулка, 1) и шип (цапфа, 2) вращаются соответственно вокруг осей $O_i Z_i$, $i=1,2$, проходящих через их центры O_i с абсолютными угловыми скоростями ω_i . Смазочный слой неньютоновской смазки ограничен поверхностями подшипника и шипа (рис. 2). Здесь $x=r\varphi$, $r \approx r_1 \approx r_2$, $r_1 = r_1(\varphi, t)$,

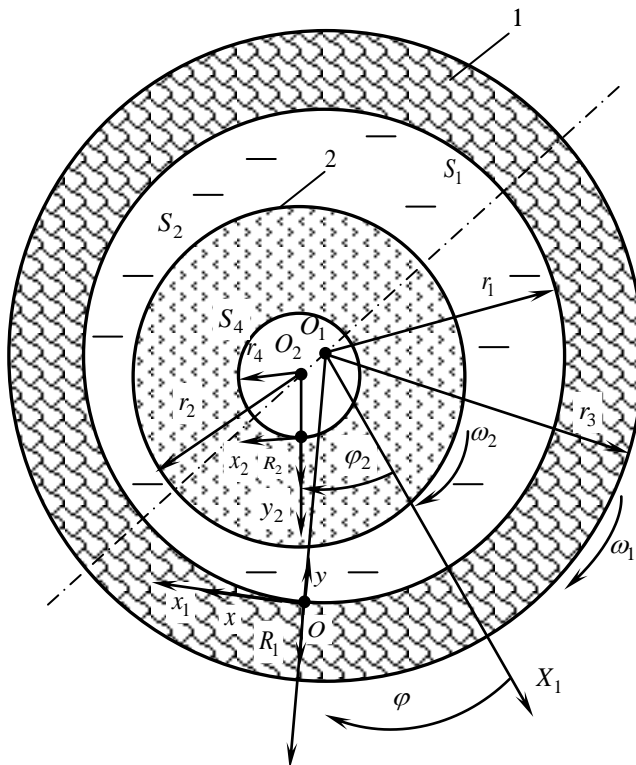


Рис. 2. Системы координат для решения тепловой задачи

$r_2 = r_2(\varphi, t)$ – радиусы втулки (внутренней поверхности) и цапфы, угловая координата φ (отсчитывается от оси $O_1 X_1$, жестко скрепленной со втулкой); оси Ox , Oz системы координат $Oxyz$, в которой рассматриваются процессы в смазочном слое, лежат в плоскости, на которую развёртывается поверхность отсчёта (поверхность втулки), ось Oy направлена по нормали к ней. На шип в плоскости Oxy в центральном сечении $z=0$ действует переменная по времени t внешняя сила $F(t)$.

Для определения поля гидродинамических давлений в тонком смазочном слое использовано обобщенное уравнение Рейнольдса [1, 2], которое для неньютоновской жидкости записываем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\bar{h}^{n+2} \left(\bar{\phi}_2 - \frac{\bar{\phi}_1^2}{\bar{\phi}_0} \right) \bar{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{h}^{n+2} \left(\bar{\phi}_2 - \frac{\bar{\phi}_1^2}{\bar{\phi}_0} \right) \bar{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right] = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\bar{\omega}_{21} \bar{\rho} \bar{h} \left(1 - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_0} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho} \bar{h}) \quad (1)$$

Здесь φ, z – угловая и осевая координаты; $\bar{\rho} = \rho / \rho_0$ – безразмерная плотность; ρ_0 – плотность ньютоновской жидкости, $\bar{p} = (p - p_a) \psi^2 / \mu_0 \omega_0$, $\psi = h_0 / r_2$, $\bar{z} = z / r_2$, $-a \leq \bar{z} \leq a$, $\bar{t} = \omega_0 t$ – безразмерные: гидродинамические давления, относительный радиальный зазор, координата по ширине подшипника, время; h_0 – радиальный установочный зазор; $a = B/D$ – относительная ширина подшипника; μ_0 – характерная вязкость смазочного материала; p_a – атмосферное давление; $B, D = 2r_2$, r_2 – соответственно, ширина, диаметр, радиус шипа; $\bar{\omega}_{2,1} = (\omega_2 - \omega_1) / \omega_0$ – безразмерная угловая скорость вращения шипа; безразмерная толщина смазочного слоя \bar{h} и её производная $\partial \bar{h} / \partial \bar{t}$, которые определяются формулами:

$$\bar{h} = 1 - \chi \cos(\varphi - \delta), \quad \partial \bar{h} / \partial \bar{t} = -\dot{\chi} \cos(\varphi - \delta) - \chi \dot{\delta} \sin(\varphi - \delta),$$

где χ – относительный эксцентриситет; δ – угол относительного положения линии центров.

$$\bar{\phi}_k = \int_0^{\bar{h}} \bar{y}^k / \bar{\mu}^* d\bar{y}, \quad k = 0; 1; 2.$$

Здесь $\bar{\mu}^*$ – безразмерная неньютоновская вязкость СМ, являющаяся функцией скорости сдвига, температуры и давления; \bar{y} – безразмерная координата поперёк смазочного слоя.

Уравнение (1) интегрировали многосеточным методом при граничных условиях Свифта-Штибера с учётом наличия на поверхностях трения источников смазывания (отверстий, канавок) [3]:

$$\bar{p}(\varphi, \bar{z} = \pm a) = 0; \bar{p}(\varphi, \bar{z}) = \bar{p}(\varphi + 2\pi, \bar{z}); \bar{p}(\varphi, \bar{z}) \geq 0, \text{ на } (\varphi, \bar{z}) \in \Omega_s, \bar{p}(\varphi, \bar{z}) = \bar{p}_s, S = 1, 2, \dots, S^*.$$

Здесь Ω_s – область источника смазки, в которой давление постоянно и равно давлению подачи \bar{p}_s , S^* – количество источников смазывания. Зависимость вязкости СМ от скорости сдвига и давления представляли в виде [4]:

$$\bar{\mu}^* = \begin{cases} \bar{\mu}_1 \cdot \exp(\beta \cdot \bar{p}), & I_2 < 10^4, c^{-1}; \\ \bar{\mu} \cdot I_2^{(n-1)/2} \cdot \exp(\beta \cdot \bar{p}), & 10^4 < I_2 < 10^6, c^{-1}; \\ \bar{\mu}_2 \cdot \exp(\beta \cdot \bar{p}), & I_2 > 10^6, c^{-1}. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь n – параметр, характеризующий степень неньютоновского поведения; β – пьезокоэффициент вязкости смазки, являющийся функцией температуры.

Согласно модели (2) на участке 1 ($I_2 < 10^4, c^{-1}$) масло ведёт себя как ньютоновская жидкость с вязкостью $\mu_1(T_s, p)$. Для участка 2 ($10^4 < I_2 < 10^6, c^{-1}$) характерно снижение вязкости по степенному закону. На участке 3 ($I_2 > 10^6, c^{-1}$) масло считается ньютоновской жидкостью с вязкостью $\mu_2(T_s, p)$.

В безразмерном виде равенства для скоростей элементарного объема смазки и их производных представим в форме:

$$\begin{aligned}\bar{V}_x &= \frac{\bar{\phi}_{0,y}}{\bar{\phi}_0} \bar{\omega}_{21} + \left(\bar{\phi}_{1,y} - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_0} \bar{\phi}_{0,y} \right) \bar{h}^{n+1} \cdot \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi}, \quad \bar{V}_z = \left(\bar{\phi}_{1,y} - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_0} \bar{\phi}_{0,y} \right) \bar{h}^{n+1} \cdot \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}, \\ \bar{V}_y &= \bar{h} \psi \left[\frac{1}{\bar{h}} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \varphi} (\bar{V}_x \bar{y} - \bar{q}_{xy}) - \frac{\partial \bar{q}_{xy}}{\partial \varphi} - \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{q}_{zy}}{\partial \varphi} \right]; \quad \bar{\phi}_{ky} = \int_{h_1}^{\bar{y}} \frac{\bar{y}^k d\bar{y}}{\bar{\mu}^*}, \quad k = 0, 1, 2 \\ \frac{\partial \bar{V}_x}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\bar{\mu}^*} \cdot \left[\frac{\bar{\omega}_{21}}{\bar{\phi}_0} + \bar{h}^{n+1} \left(\bar{y} - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_0} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} \right]; \quad \frac{\partial \bar{V}_z}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\bar{\mu}^*} \cdot \bar{h}^{n+1} \left(\bar{y} - \frac{\bar{\phi}_1}{\bar{\phi}_0} \right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}.\end{aligned}\tag{3}$$

Объёмные расходы смазки через сечения единичной протяженности в направлении координат x и z записывали в виде:

$$\bar{q}_{xy} = \int_0^{\bar{y}} \bar{V}_x d\bar{y}; \quad \bar{q}_{zy} = \int_0^{\bar{y}} \bar{V}_z d\bar{y}.$$

Обобщенное уравнение энергии (теплопереноса) для смазочного слоя вязкой несжимаемой жидкости с учетом малого влияния теплопроводности в направлении координат x, z записывается в виде [5]:

$$\rho c_0 \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_0 \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + V_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \lambda_0 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = D,\tag{4}$$

где ρ, c_0, λ_0 – плотность, удельные теплоемкость и теплопроводность смазки (принимаются постоянными); V_x, V_y, V_z – компоненты вектора скорости элементарного объема смазки;

$D = \mu^* \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} \right)^2 \right]$ – диссипативная функция.

Введем следующие обозначения $\bar{T} = T/T_0$ – безразмерная температура в произвольной точке смазочного слоя, T_0 – характерная температура; $\bar{y} = y/h$; $\bar{h} = h/h_0^*$; $\psi = h_0^*/r$, $\bar{V}_x = V_x/\omega_0 r$, $\bar{V}_y = V_y/\omega_0 r$, $\bar{V}_z = V_z/\omega_0 r$, $\bar{\mu} = \mu/\mu_0$, где h_0^* – характерная толщина смазочного слоя при центральном положении цапфы; $Pe = \rho_0 \bar{\rho} c_0 \omega_0 \Delta_0^2 / \lambda_0$ – число Пекле; $k_T = \rho_0 \bar{\rho} c_0 T_0 \psi^2 / (\omega_0 \mu_0)$. В этом случае уравнение энергии для смазочного слоя радиального подшипника с неньютоновской смазкой в безразмерной форме запишем в виде:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} = -\bar{V}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial \varphi} - \bar{D} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} - \bar{V}_z \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} + \frac{1}{Pe} \cdot \frac{1}{\bar{h}^2} \cdot \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{k_T} \cdot \frac{1}{\bar{h}^{n+1}} \bar{D}.\tag{5}$$

Здесь

$$\bar{D} = -\frac{1}{\bar{h}} \left[\bar{y} \frac{\partial \bar{h}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial (\bar{h} \bar{q}_{xy})}{\partial \varphi} + \bar{h} \frac{\partial \bar{q}_{zy}}{\partial \bar{z}} \right].\tag{6}$$

Дифференциальное уравнение (5) линейно относительно производных. Коэффициенты перед конвективными членами представляют собой функции от переменных $\varphi, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$. Оно является параболическим по времени и поэтому для него ставится задача с начальными и граничными условиями.

Распределение температур $\bar{T}_1(\varphi, R_2, \bar{t})$ во втулке, где R_2 радиальная координата (рис. 1), определяем решением уравнения для неустановившегося теплового потока, которое в цилиндрических координатах и безразмерных переменных записываем в виде:

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha}_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \bar{R}_1^2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial R_1} + \frac{1}{R_1^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (7)$$

Здесь $\bar{R}_1 = R_1/r$; $\bar{T}_1 = T_1/T_0$; $\bar{\alpha}_1 = \lambda_1/(c_1 \rho_1 r^2 \omega_0)$ – безразмерный коэффициент теплоотдачи от втулки в окружающую среду, $r_1 \approx r_2 \approx r$; ρ_1, c_1, λ_1 – плотность, удельная теплоемкость, удельная теплопроводность материала втулки.

Введем расчетную систему координат $Ox_1y_1z_1$ и безразмерные переменные $\bar{y}_1 = (R_1 - r_1)/(r_3 - r_1) = (\bar{R}_1 - 1)/(\bar{r}_3 - 1)$, $\bar{r}_3 = r_3/r$, где r_1, r_3 – расчетные радиусы внутренней и наружной поверхностей втулки.

В этом случае записываем уравнение (7) в виде:

$$\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha}_1 \left(\frac{1}{(\bar{r}_3 - 1)^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \bar{y}_1^2} + \frac{1}{[1 + (\bar{r}_3 - 1)\bar{y}_1][\bar{r}_3 - 1]} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{y}_1} + \frac{1}{[1 + (\bar{r}_3 - 1)\bar{y}_1]^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_1}{\partial \varphi^2} \right). \quad (8)$$

Аналогичным образом распределение температур $\bar{T}_2(\varphi_2, R_2, \bar{t})$ в шипе определяем решением уравнения для неустановившегося теплового потока, которое в цилиндрических координатах и безразмерных переменных записываем в виде:

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha}_2 \left(\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \bar{R}_2^2} + \frac{1}{R_2} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial R_2} + \frac{1}{R_2^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \varphi_2^2} \right). \quad (9)$$

Здесь $\bar{R}_2 = R_2/r$; $\bar{T}_2 = T_2/T_0$; $\bar{\alpha}_2 = \lambda_2/(c_2 \rho_2 r^2 \omega_0)$ – безразмерный коэффициент теплоотдачи от шипа в окружающую среду, ρ_2, c_2, λ_2 – плотность, удельная теплоемкость, удельная теплопроводность материала шипа.

В расчетной системе координат $Ox_2y_2z_2$ введем безразмерные переменные $\bar{y}_2 = (R_2 - r_4)/(r_2 - r_4) = (\bar{R}_2 - \bar{r}_4)/(1 - \bar{r}_4)$, $\bar{r}_4 = r_4/r$, где r_4 – радиус внутренней поверхности втулки.

Следовательно, уравнение (9) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{t}} = \bar{\alpha}_2 \left(\frac{1}{(1 - \bar{r}_4)^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \bar{y}_2^2} + \frac{1}{[\bar{r}_4 + (1 - \bar{r}_4)\bar{y}_2](1 - \bar{r}_4)} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{y}_2} + \frac{1}{[\bar{r}_4 + (1 - \bar{r}_4)\bar{y}_2]^2} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \varphi^2} \right). \quad (10)$$

Граничные условия, при которых интегрировали уравнения (5), (8) и (10)

тепловой подзадачи, сформулированы следующим образом.

Для температуры СМ и втулки справедливы условия периодичности в окружном направлении:

$$\bar{T}(\varphi, \bar{y}, \bar{t}) = \bar{T}(\varphi + 2\pi, \bar{y}, \bar{t}); \quad \bar{T}_1(\varphi, \bar{R}_1, \bar{t}) = \bar{T}_1(\varphi + 2\pi, \bar{R}_1, \bar{t}).$$

На наружной поверхности втулки считалась справедливой гипотеза свободной конвекции:

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial R} \right|_{\bar{R}=\bar{r}_3} = \frac{\alpha_1 r}{\lambda_1} \left(\bar{T}_1 \Big|_{\bar{R}=\bar{r}_3} - \bar{T}_c \right).$$

На поверхности, общей для СМ и втулки, приняты условия непрерывности потока тепла (условия сопряжения):

$$\left. \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial y_1} \right|_{\bar{y}_1=0} = -(\bar{r}_3 - 1) \frac{\lambda_0}{\lambda_1 h \psi} \left. \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{y}} \right|_{\bar{y}=0}.$$

На поверхностях СМ, общих с поверхностями втулки и шипа, ставятся условия равенства температур:

$$\bar{T}(\varphi, \bar{y} = 0, \bar{t}) = \bar{T}_1(\varphi, \bar{y}_1 = 0, \bar{t} - \bar{t}_y); \quad \bar{T}(\varphi, \bar{y} = 1, \bar{t}) = \bar{T}_2(\bar{t} - \bar{t}_y).$$

Система уравнений (5), (8) и (10) распределения температур в СМ, втулке и шипе записывали уравнением в операторном виде, для построения разностных аналогов которого применим неявный метод переменных направлений Писмена-Рекфорда [6]. Опыт многих исследователей показал, что неявные схемы этого метода допускают большие по величине размеры шагов по времени, ускоряют расчет в целом. Дуглас [7] успешно реализовал трехшаговую схему при интегрировании такого вида уравнения и показал, что такая схема при втором порядке точности $O(\Delta_t^2, \Delta_x^2, \Delta_y^2, \Delta_z^2)$ безусловно устойчива.

Результаты расчета. Первые результаты были получены на примере расчета динамики шатунного подшипника двигателя внутреннего сгорания типа ЧН 13/15, производства ОАО «ЧТЗ-Уралтрак». В качестве исходных данных были использованы также индикаторные диаграммы для режима максимальной мощности ($\omega = 2100$ об./мин) и вязкостно-температурная характеристика основного моторного масла М-10ДМ ($\mu_{40} = 0,0762$ Па·с; $\mu_{100} = 0,0103$ Па·с). Граничные условия по температуре задавали из условия, что температура СМ в центральном отверстии шипа известна, равна температуре подачи и не меняется в процессе нагружения $\bar{T}_4 = T_{\text{ex}} / T_0 \approx 0,9$. Значение температуры на внешнем радиусе втулки приравнивали температуре в картере двигателя $\bar{T}_3 = T_{\text{кар}} / T_0 \approx 0,8$.

В процессе расчета в любой момент времени получали трехмерное распределение температуры в СМ. На рис. 3 приведено распределение температуры по координате φ для трех произвольно выбранных значений угла пово-

рота коленчатого вала. Распределение температуры по координате \bar{y} изображено на рисунке 4, где для каждого элемента системы «шип – смазочный слой – втулка» было задано по 20 элементов сетки.

Решение базировалось на конечно-разностной аппроксимации. Перекос шипа не учитывался. При решении уравнения для гидродинамических давлений учитывалась зависимость вязкости смазки от второго инварианта скоростей сдвига и полученного распределения температур. Максимальная температура в слое смазки достигается в области наибольших гидродинамических давлений.

Представленная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект НК-13-08-00875\13).

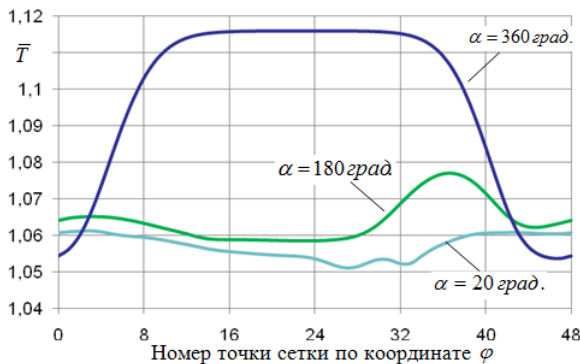


Рис. 3. Распределение температуры по координате φ

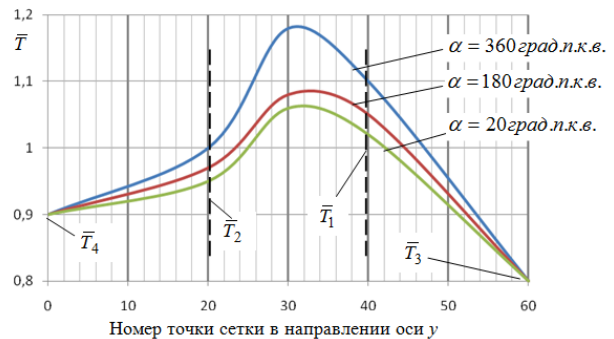


Рис. 4. Распределение температуры по координате \bar{y}

Библиографический список

1. Прокопьев, В.Н. Термогидродинамическая задача смазки сложнагруженных опор скольжения неньютоновскими жидкостями / В.Н. Прокопьев, В.Г. Караваев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2003. – № 1(17). – С. 55–66.
2. Рождественский, Ю.В. Решение задач оптимизации трибосопряжений поршневых и роторных машин с использованием алгоритма сохранения массы / Ю.В. Рождественский, К.В. Гаврилов, А.А. Дойкин, М.А. Макарихин // Трение и смазка в машинах и механизмах. – 2011. – № 8. – С. 38–43.
3. Прокопьев, В.Н. Многосеточные алгоритмы интегрирования уравнения Рейнольдса в задачах динамики сложнагруженных подшипников скольжения / В.Н. Прокопьев, А.К. Бояршинова, Е.А. Задорожная // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2005. – № 5. – С. 16–21.
4. Леванов, И.Г. Методика расчета гидромеханических характеристик сложнагруженных подшипников скольжения поршневых и роторных машин, смазываемых неньютоновскими маслами / И.Г. Леванов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». – 2011. – № 31 (258). – С. 34–43.

5. Маленко, П.И. Температурные поля и эксплуатационные свойства пар трения скольжения со смазочным материалом / П.И. Маленко, В.К. Зеленко, Д.М. Левин; под ред. Ю.Н. Дроздова. – М.: Машиностроение, 2011. – 239 с.

6. Роуч, П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 618 с.

7. Douglas, J. On the numerical solution of heat conduction problems in two and three space variables / J. Douglas, H. H. Rachford // Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), pp. 421–439.