

*С.В. Соколов*

Исследована зависимость изохронности крутильных колебаний трифилярного подвеса от его геометрических параметров. Показано, что при увеличении длины подвеса изохронность колебаний ухудшается, приближаясь в пределе к изохронности колебаний математического маятника. Численными методами найдено оптимальное соотношение геометрических параметров мультифилярного подвеса, при котором период его крутильных колебаний практически не зависит от амплитуды в пределах  $\pm \pi/2$ .

Ключевые слова: период крутильных колебаний, момент инерции, изохронность, гармонические колебания.

Крутильные колебания тел, подвешенных на мультифилярном подвесе, используют в технике для измерения моментов инерции различных тел [1]. К сожалению, точность этого простого метода принципиально ограничена неизохронностью колебаний подвеса, т.е. зависимостью периода колебаний от амплитуды. Этот недостаток механических колебательных систем имеет глубокие исторические корни. Еще Х. Гюйгенс озабоченный неизохронностью математического (кругового) маятника, предложил циклоидальный маятник [2, 3].

В физическом практикуме для определения моментов инерции тел обычно применяют трифилярный подвес [4, 5]. Величину искомого момента инерции вычисляют по измеренному периоду крутильных колебаний тела и известным геометрическим параметрам подвеса, используя приближенную формулу, полученную при двух допущениях:

- 1) амплитуда крутильных колебаний мала (не больше  $5-6^\circ$ );
- 2) длина подвеса намного больше радиусов его платформ, поскольку принято считать, что чем больше длина подвеса, тем выше изохронность его колебаний.

Первое условие усложняет измерение периода колебаний, а второе – вызывает определенные практические неудобства в работе с прибором.

Крутильные колебания подвеса будут изохронными, если момент возвращающих сил является линейной функцией угла поворота подвижной платформы. Точные соотношения, связывающие моменты сил в трифилярном подвесе с углом поворота платформы, достаточно просты. Цель настоящей работы – анализ влияния геометрических параметров подвеса на характер зависимости возвращающего момента от угла поворота нижней платформы подвеса, и, как следствие, на изохронность ее колебаний.

Типичный трифилярный подвес (рис. 1) состоит из трех нитей 2, верхние концы которых прикреплены симметрично по вершинам равностороннего треугольника к верхнему основанию 1, а нижние – к нижнему основанию 3. Поворачивая верхнее основание вокруг вертикальной оси на некоторый угол, возбуждают крутильные колебания нижнего основания. На нижнее основание помещают исследуемое тело, момент инерции которого определяется, располагая его так, чтобы ось подвеса не отклонялась вертикали.

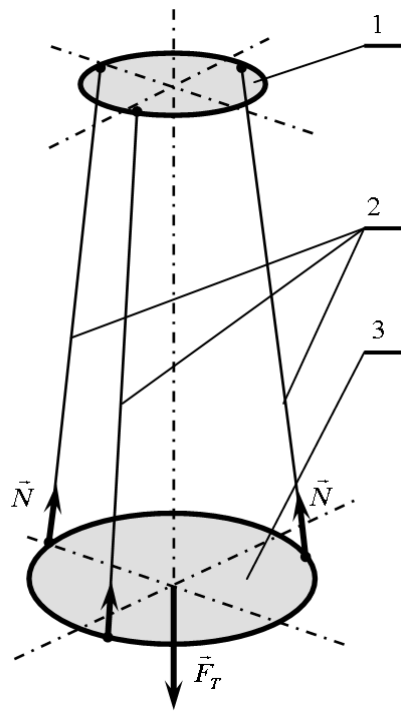


Рис. 1. Трифилярный подвес

На покоящееся нижнее основание подвеса (рис. 2) массой  $m$  со стороны земли действует сила тяжести  $F_T$ , а со стороны нити – реакции нити  $N$ . В соответствии со вторым законом Ньютона сумма сил, действующих на основание, равна нулю. В силу симметрии подвеса вертикальная проекция реакции нити  $N_A$  равна по модулю одной третьей силы тяжести, т.е.:

$$N_A = \frac{1}{3}mg \quad (1)$$

Модуль реакции подвеса  $N$  можно определить, зная величину угла  $\alpha$  (рис. 2):

$$N = \frac{N_A}{\cos \alpha} = \frac{mg}{3 \cdot \cos \alpha} \quad (2)$$

Модуль горизонтальной проекции реакции  $N_2$  равен:

$$N_A = N \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot g \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \cos \alpha} = \frac{m \cdot g}{3} \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{R-r}{h} = \frac{R-r}{\sqrt{l^2 - (R-r)^2}} \quad (4)$$

Горизонтальная проекция вектора  $N$  направлена радиально к центру основания.

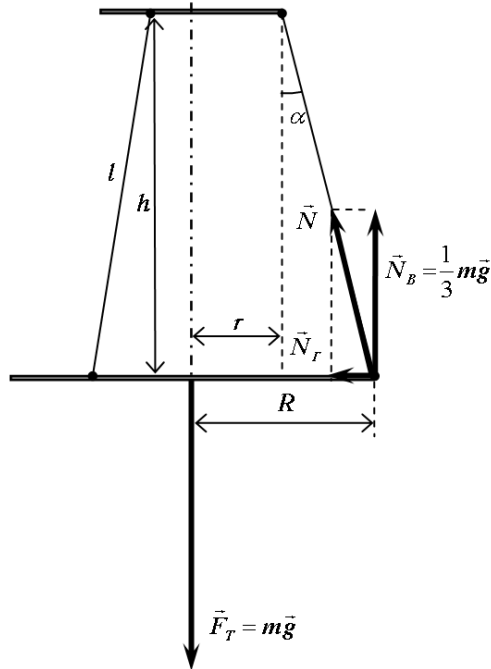


Рис. 2. Силы, действующие на покоящееся нижнее основание подвеса

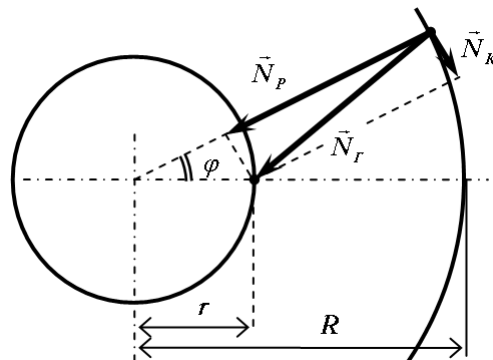


Рис. 3. Силы, действующие на повернутое нижнее основание.  
Вид на трифилярный подвес сверху (для упрощения построений  $N_r$  совмещена с проекцией нити подвеса)

При повороте нижнего основания относительно верхнего на угол  $\psi$  направление и величина горизонтальной проекции силы реакции подвеса  $N_r$  изменится (рис. 3), что приведет к возникновению касательной составляющей  $N_k$ , которая будет стремиться повернуть нижнее основание в положение равновесия.

Отношение касательной составляющей к радиальной составляющей не-  
трудно определить из геометрических законов:

$$\frac{N_{\hat{E}}}{N_D} = \frac{r \cdot \sin \varphi}{R - r \cdot \cos \varphi} \quad (5)$$

С другой стороны из теоремы Пифагора:

$$N_{\hat{A}}^2 = N_{\hat{E}}^2 + N_D^2 \quad (6)$$

Решая совместно уравнения (5) и (6) находим:

$$N_{\hat{E}} = \frac{N_{\hat{A}} \cdot r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi}} \quad (7)$$

И, далее, с учетом (3), получаем:

$$N_{\hat{E}} = \frac{m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi}} \quad (8)$$

Следует также учесть, что угол  $\alpha$  также изменился. Величина этого уг-  
ла будет зависеть от угла поворота нижнего основания  $\varphi$ . На основе гео-  
метрических построений нетрудно показать, что:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi}}{\sqrt{l^2 - (R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi)}} \quad (9)$$

С учетом (9) получаем:

$$N_{\hat{E}} = \frac{m \cdot g}{3} \cdot \frac{r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - (R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi)}} \quad (10)$$

Далее учитывая плечо силы  $R$  и то, что подвеса три, находим результи-  
рующий момент возвращающих сил:

$$M(\varphi) = 3N_{\hat{E}} \cdot R = m \cdot g \cdot \frac{R \cdot r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - (R^2 + r^2 - 2 \cdot R \cdot r \cdot \cos \varphi)}} \quad (11)$$

Преобразуем формулу (11):

$$M(\varphi) = m \cdot g \cdot \frac{R \cdot r \cdot \sin \varphi}{\sqrt{l^2 - R^2 + r^2} \sqrt{1 + \frac{2Rr}{l^2 - R^2 + r^2} \cos \varphi}}$$

и введем новое обозначение, объединив геометрические параметры подве-  
са в обобщенный параметр  $\xi$ :

$$\xi = \frac{2Rr}{l^2 - R^2 + r^2} \quad (12)$$

Тогда:

$$M = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{\xi \cdot R \cdot r}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + \xi \cdot \cos \varphi}} \quad (13)$$

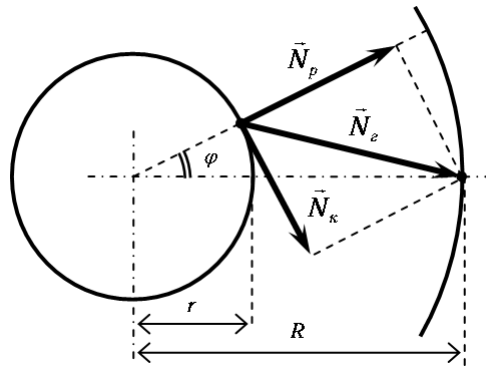


Рис. 4. Силы, действующие на повернутое верхнее основание.  
Вид на трифилярный подвес сверху

Нетрудно показать, что при рассмотрении сил, действующих на верхнее основание со стороны подвеса (рис. 4.), мы получим то же самое значение результирующего момента. Поскольку, несмотря на то, что касательная компонента силы будет больше, однако плечо силы в этом случае меньше ( $r < R$ ).

Зависимость величины возвращающего момента от угла поворота  $M(\varphi)$  при больших изменениях угла  $\varphi$  является существенно нелинейной. Однако характер нелинейности, как видно из соотношения (13) зависит от параметра  $\xi$ . Анализ показывает, что можно найти такое значение параметра  $\xi$ , при котором в пределах  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$  указанная зависимость весьма близка к линейной.

Воспользовавшись методом наименьших квадратов, найдем значение параметра  $\xi$ , для которого зависимость  $M(\varphi)$  максимально приближается к линейной.

На рисунке 5 приведена зависимость модуля вектора невязки  $R(\xi)$ , рассчитанного для 18 значений угла  $\varphi$  в диапазоне  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

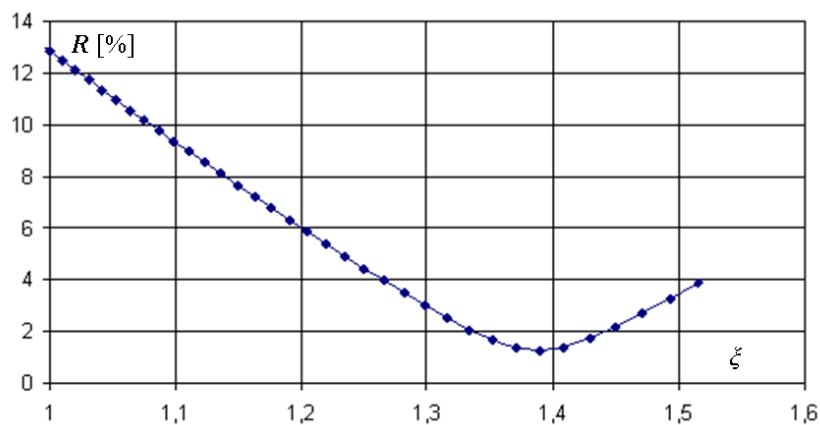


Рис. 5. Результаты оптимизации параметра  $\xi$

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{18} (M(\varphi_i) - a \cdot \varphi_i)^2}, \text{ где } a = \frac{M(\pi/2)}{\pi/2}.$$

На рисунке 6 представлен нормированный график зависимости  $M(\varphi)$ , построенный для  $\xi = 1,39$ . Расчеты показывают, что при таком значении  $\xi$  средняя нелинейность зависимости возвращающего момента от угла поворота не превышает 0,1 % в диапазоне углов крутильных колебания  $\pm \pi/2$ .

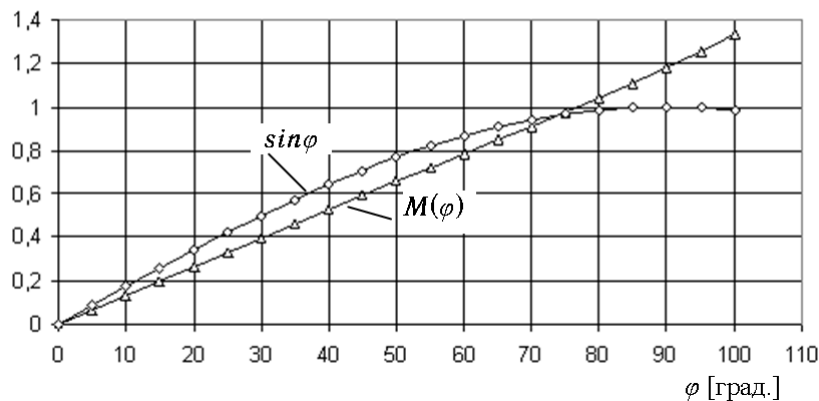


Рис. 6. Нормированный график зависимости  $M(\varphi)$

Возвращающие силы, действующие в таком подвесе, можно считать линейными в пределах  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ . Т.е.:

$$M(\varphi) = D \cdot \varphi \quad (14)$$

где  $D$  – модуль кручения.

Найдем величину  $D$ .

$$M(\pi/2) = D \cdot \pi/2$$

Отсюда с учетом (13) получаем:

$$D = \frac{2}{\pi} M(\pi/2) = \frac{2}{\pi} \cdot m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{\xi} \cdot R \cdot r}{\sqrt{2}} = mg \cdot \frac{\sqrt{2\xi Rr}}{\pi} \quad (15)$$

Из теории колебаний известно, что динамика движения такой системы описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка:  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{D}{J} \cdot \varphi$ , где  $J$  – момент инерции нижнего основания относительно оси подвеса.

Решением этого уравнения является гармоническая функция времени. Т.е. в системе будут происходить гармонические колебания, описываемые следующей зависимостью

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t) + \varphi_i,$$

где  $\varphi_0$  – амплитуда колебания;

$\varphi_i$  – начальное значение угла поворота нижнего основания относительно верхнего (в момент времени  $t=0$ ).

Причем круговая (циклическая) частота колебаний  $\omega$  будет определяться только значениями модуля кручения и момента инерции колеблющегося тела (в нашем случае нижнего основания) относительно оси вращения:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J}}.$$

Соответственно период колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (16)$$

Следовательно, измерив период колебаний системы, мы сможем определить момент инерции колеблющегося тела относительно оси подвеса:

$$J = \frac{T^2 D}{4\pi^2} = T^2 mg \cdot \frac{\sqrt{2\xi Rr}}{4\pi^3}. \quad (17)$$

Искомый момент инерции определяется квадратом периода колебания, массой тела, ускорением свободного падения и некоторым коэффициентом  $\xi_n$ , зависящим только от геометрических параметров подвеса:

$$J = T^2 mg \cdot \xi_i, \text{ где } \xi_i = \frac{\sqrt{2\xi Rr}}{4\pi^3}$$

Или с учетом (12):

$$\xi_i = \frac{Rr}{2\pi^3 \sqrt{l^2 - (R^2 + r^2)}}. \quad (18)$$

Таким образом, выбрав оптимальные соотношения между длиной подвеса и радиусами его платформ, мы получим колебательную систему изохронную в широком диапазоне углов.

Аналогичным образом можно оптимизировать параметры любого мультифилярного подвеса, существенно повысив изохронность его колебаний.

Оптимизированный мультифилярный подвес позволит существенно повысить точность измерения моментов инерции, при значительно меньшей длине подвеса.

#### Библиографический список

1. Гернет, М.М. Определение моментов инерции / М.М. Гернет, В.Ф. Ратобыльский. – М.: Машиностроение, 1969. – 247 с.
2. Берман, Г.Н. Циклоида / Г.Н. Берман. – М.: Наука, 1980. – 112 с.
3. Гиндикин, С.Г. Рассказы о физиках и математиках / С.Г. Гиндикин. – 4-е изд., исправ. – М.: МЦНМО, 2006. – 464 с.
- 4 Физический практикум / под ред. В.И. Ивероновой. – М.: Физматгиз, 1962. – 956 с.
5. Руководство к лабораторным занятиям по физике / под ред. Л.Л. Гольдина. – М.: Наука, 1973. – 688 с.

[К содержанию](#)