

ВЗАИМОСВЯЗЬ ЗАДАЧ ПОПЕРЕЧНОГО ИЗГИБА И СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТРЕУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК

В.И. Коробко, О.В. Бояркина



Коробко Виктор Иванович
Орел, ОГТУ, директор центра
экспертизы промбезопасности,
д.т.н., профессор

С помощью численного эксперимента исследуется функциональная связь между интегральными физическими характеристиками в задачах поперечного изгиба и свободных колебаний упругих пластинок в виде равнобедренных треугольников с однородными и комбинированными граничными условиями.

Известно [1, 2], что интегральные физические характеристики пластинок (максимальный прогиб w_0 и основная частота колебаний ω) функционально связаны с площадью пластинки A , её цилиндрической жёсткостью D , видом

нагрузки $q(x,y)$ и массой единицы площади m :

$$w_0 = \alpha \frac{qA^2}{D}, \quad \omega^2 = \beta^4 \frac{D}{mA^2}, \quad (1)$$

где коэффициенты пропорциональности α и β зависят от формы пластинки (Φ) и условий на границе (Γ):

$$\alpha = f(\Phi, \Gamma), \quad \beta = \varphi(\Phi, \Gamma).$$

Если умножить левые и правые части выражения (1) друг на друга, то получится результат, не зависящий от площади пластинки и цилиндрической жёсткости (вида материала):

$$w_0 \omega^2 = \alpha \beta^4 \frac{q(x,y)}{m} = K \frac{q(x,y)}{m}, \quad (2)$$

где $K = \alpha \beta^4$.

Детальное изучение этого произведения, когда в задаче поперечного изгиба пластинок внешняя нагрузка является равномерно распределенной ($q(x,y) = q$), проведено в работах [3, 4], где с помощью численного эксперимента показано, что для всего множества упругих изотропных пластинок с выпуклым контуром и произвольными граничными условиями произведение коэффициентов пропорциональности $K = \alpha \beta^4$, представленное в координатных осях $K - K_f$ (где K_f – коэффициент формы пластинки [5]), с погрешностью, не превышающей (5...6)%, вырождается в одну плавную и монотонную кривую. Это свидетельствует о том, что интегральные физические параметры пластинок w_0 и ω функционально связаны между собой, а произведение $K = \alpha \beta^4$ не зависит от граничных условий, а зависит только от коэффициента формы пластинок K_f .

Коэффициент формы пластинки K_f численно характеризует её «правильность» (симметричность) и определяется контурным интегралом

$$K_f = \min \int_L \frac{ds}{h},$$

где ds – длина элементарного участка на границе контура пластинки; h – длина перпендикуляра, опущенного из полюса, взятого внутри области, на касательную к переменной точке контура. Подробные исследования этой геометрической характеристики проведены в статье [5].

Проведем исследование взаимосвязи интегральных физических параметров w_0 и ω для пластинок в виде равнобедренного треугольника. За основу возьмем решения, полученные в работе [6] с помощью МКЭ и с использованием программного комплекса «Ли́ра» (см. таблицу, колонки 3 и 4).

Анализ этих решений показал, что для пластинок в виде равностороннего треугольника полученные результаты незначительно (в пределах одного процента) отличаются от известных точных и приближенных решений, найденных с высокой точностью, которые приводятся в известной справочной и научной литературе [1, 2].

Для исправления этой систематической погрешности при решении рассматриваемой задачи с помощью программного комплекса «Ли́ра» были введены поправочные коэффициенты K_w и K_ω , которые позволили с высокой точностью удовлетворить известным решениям.

Исправленные таким образом результаты и представлены в таблице в колонках 3 и 4. По этим данным построены аппроксимирующие функции $1/\omega^2 - w_0$ и $w_0 - 1/\omega^2$, графики которых изображены на рисунке. Оказалось, что эти функции хорошо описываются линейными зависимостями:

$$1/\omega^2 = (a_1 + b_1 \cdot \alpha) \cdot A^2 \cdot m/D, \quad (3)$$

где $a_1 = 1,9937 \cdot 10^{-6}$, $b_1 = 0,6226$;

$$w_0 = 10^{-3} (a_2 + b_2/\beta^4) \cdot qA^2/D, \quad (4)$$

где $a_2 = -0,010267$, $b_2 = 1608,599$. Очевидно, приведенные зависимости будут справедливы и для пластинок в виде равнобедренного треугольника с произвольным законом изменения граничных условий (любая комбинация жёсткого защемления и шарнирного опирания вдоль их сторон). Расчеты, проведенные по формулам (3) и (4) представлены в таблице в колонках 6 и 8. Анализ этих результатов показывает:

Значения максимального прогиба и основной частоты колебаний пластинок в виде равнобедренного треугольника и взаимосвязь этих параметров

Вид опирания	Угол при вершине основания	Решения по МКЭ		Решения по (1)		Решения по (2)	
		$\alpha \cdot 10^3$	β^2	β^2	$\Delta, \%$	$\alpha \cdot 10^3$	$\Delta, \%$
1	2	3	4	6	7	8	9
$1/\omega^2 = (1,9937 \cdot 10^{-6} + 0,6226 \cdot \alpha) \cdot 1/A^2 \cdot m/D$; (1) $w_0 = 10^{-3} (-0,010267 + 1608,599/\beta^4) \cdot qA^2/D$ (2)							
Шарнирное опирание по всем сторонам пластинок	20/80	1,625	31,31	31,40	+0,29	1,631	+0,37
	30/75	2,335	26,17	26,21	+0,15	2,338	+0,13
	40/70	2,741	24,22	24,19	-0,13	2,732	-0,33
	50/65	3,013	23,05	23,08	+0,13	3,017	+0,13
	60/60	3,086	22,79	22,80	+0,04	3,087	+0,03
	70/55	<u>3,035</u> 3,026	<u>23,05</u> 23,06	<u>23,08</u> 23,03	<u>+0,13</u> +0,13	<u>3,017</u> 3,015	<u>-0,59</u> -0,36
	80/50	<u>2,837</u> 2,845	<u>23,70</u> 23,74	<u>23,78</u> 23,75	<u>+0,33</u> +0,04	<u>2,853</u> 2,844	<u>+0,92</u> +0,04
	90/45	2,630	24,75	24,70	+0,20	2,616	-0,53
	100/40	2,313	26,31	26,33	+0,07	2,314	+0,04
Боковые стороны пластинок шарнирно оперты, а основание жестко защемлено	20/80	<u>1,315</u> 1,321	<u>34,68</u> 34,79	<u>34,91</u> 34,83	<u>+0,66</u> +0,11	<u>1,327</u> 1,318	<u>+0,91</u> -0,23
	30/75	1,754	30,17	30,23	+0,20	1,757	+0,17
	40/70	1,960	28,54	28,60	+0,21	1,965	+0,25
	50/65	2,019	28,21	28,18	-0,11	2,011	-0,40
	60/60	1,967	28,54	28,55	+0,04	1,965	-0,10
	70/55	1,843	29,55	29,50	-0,17	1,832	-0,60
	80/50	1,667	31,02	31,01	-0,03	1,661	-0,36
	90/45	1,456	33,07	33,18	+0,33	1,461	+0,34
	100/40	<u>1,247</u> 1,241	<u>35,93</u> 35,88	<u>35,84</u> 35,93	<u>-0,25</u> +0,13	<u>1,236</u> 1,239	<u>-0,88</u> -0,16
Боковые стороны пластинок жестко защемлены, а основание шарнирно оперто	20/80	<u>0,992</u> 0,515	<u>39,48</u> 55,46	<u>40,17</u> 55,67	<u>+1,75</u> +0,41	<u>1,022</u> 0,513	<u>+3,02</u> -0,39
	30/75	<u>0,819</u> 0,820	<u>43,93</u> 44,06	<u>44,20</u> 44,17	<u>+0,61</u> +0,25	<u>0,823</u> 0,818	<u>+0,49</u> -0,24
	40/70	1,058	38,92	38,90	-0,05	1,052	-0,57
	50/65	1,213	36,34	36,34	0,00	1,208	-0,41
	60/60	1,296	35,07	35,16	+0,27	1,298	+0,15
	70/55	<u>1,316</u> 1,311	<u>34,95</u> 34,92	<u>34,89</u> 34,96	<u>-0,17</u> -0,11	<u>1,307</u> 1,309	<u>-0,68</u> -0,15
	80/50	1,275	35,32	35,45	+0,37	1,279	+0,31
	90/45	1,183	36,62	36,80	+0,49	1,189	+0,51
	100/40	1,054	38,77	38,98	+0,53	1,060	+0,38
Жесткое защемление по всем сторонам пластинок	20/80	<u>0,430</u> 0,430	<u>60,14</u> 60,52	<u>60,89</u> 60,61	<u>+1,25</u> +0,15	<u>0,434</u> 0,429	<u>+0,93</u> -0,23
	30/75	0,643	49,56	49,85	+0,58	0,645	+0,31
	40/70	<u>0,785</u> 0,787	<u>44,83</u> 44,95	<u>45,08</u> 45,08	<u>+0,49</u> +0,29	<u>0,790</u> 0,786	<u>+0,64</u> -0,13
	50/65	0,856	43,07	43,23	+0,33	0,857	+0,12
	60/60	0,880	42,51	42,64	+0,31	0,880	0,00
	70/55	0,858	43,07	43,18	+0,25	0,857	-0,12
	80/50	<u>0,790</u> 0,803	<u>44,63</u> 44,50	<u>44,94</u> 44,63	<u>+0,69</u> +0,29	<u>0,797</u> 0,802	<u>+0,89</u> -0,12
	90/45	0,723	46,96	47,02	+0,13	0,719	-0,55
	100/40	<u>0,610</u> 0,623	<u>49,88</u> 50,53	<u>51,18</u> 50,65	<u>+0,60</u> +0,24	<u>0,636</u> 0,620	<u>-4,26</u> -0,48

1. Для пластинок с углами при вершине γ от 30° до 100° эти формулы дают результаты, отличные от найденных с помощью МКЭ, в пределах одного процента (см. колонки 7 и 9 в таблице).

2. Для пластинок с острыми углами при $\gamma \leq 20^\circ$ и $\gamma \geq 100^\circ$ эта погрешность возрастает, хотя и не превышает 4,5%. В приведенной таблице жирным шрифтом выделены результаты, которые дают погрешность, превышающую 0,50%.

3. Отмечается немонотонность решений, полученных с помощью МКЭ для пластинок с острыми углами. При некоторых значениях острых углов наблюдаются «всплески» (резкие отклонения решений, достигающие 4,5%), которые затем исчезают при незначительном изменении углов пластинки. Эти всплески объясняются неустойчивостью решений, получаемых с помощью МКЭ при наличии весьма острых углов в пластинках.

4. Указанные всплески наблюдаются и для максимального прогиба, и для основной частоты колебаний пластинок. Их нетрудно сгладить, если взять средние значения результатов, полученных с помощью МКЭ и с помощью функций (3) и (4). Такие сглаженные результаты приведены ниже соответствующих строк таблицы, выделенных жирным шрифтом. Эти новые результаты, очевидно, можно считать более точными, поскольку они не противоречат общей тенденции монотонного изменения интегральных физических характеристик треугольных пластинок при постепенном изменении угла при вершине треугольника, хорошо удовлетворяют функциям (3) и (4), которые с высокой точностью описывают подавляющее большинство полученных с помощью МКЭ результатов другими авторами, в том числе и для многих пластинок с острыми углами.

Анализ линейных функций (3) и (4) показывает, что свободные члены в них на порядок ниже членов, содержащих аргументы. Пренебрегая этими членами, после некоторой корректировки коэффициентов пропорциональности b , можно записать:

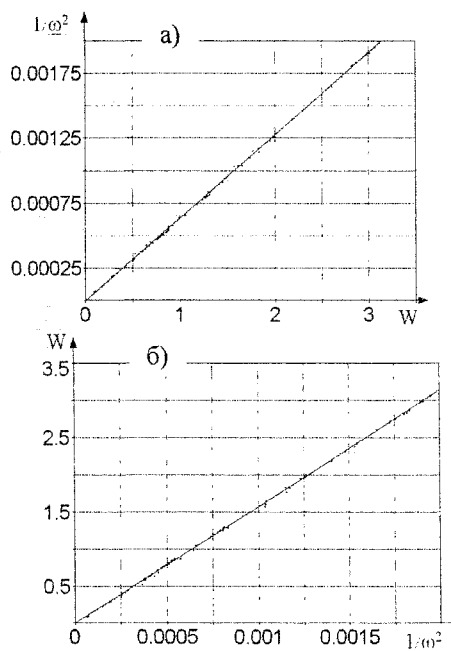
$$w_0 = 1,5965 \frac{q}{m} \frac{1}{\omega^2} = 1,5965 \frac{q}{m} T^2,$$

$$\frac{1}{\omega^2} = T^2 = 0,6264 \frac{m}{q} w_0,$$

где T - период свободных колебаний пластинок. Расчеты, проведенные по этим формулам, показывают, что получаемые результаты отличаются от соответствующих решений, найденных по формулам (3) и (4), с погрешностью, не превышающей одного процента.

Таким образом, с помощью численного эксперимента показана линейная функциональная связь максимального прогиба пластинок в виде равнобедренного треугольника с произвольными

граничными условиями, находящимися под действием равномерно распределенной нагрузки, и квадрата периода их колебаний в ненагруженном состоянии. Эта функциональная зависимость может найти широкое применение в теории моделирования строительных конструкций, а также при разработке методов контроля их жесткости с использованием вибрационных методов.



Зависимость максимального прогиба треугольных пластинок от основной частоты их колебаний и наоборот

Литература

1. Тимошенко, С.П. *Пластины и оболочки* /С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. - М. 1963. - 635 с.
2. Филиппов, А.П. *Колебания механических систем* /А.П. Филиппов. - Киев: Наукова думка, 1965.-716 с.
3. Коробко, В.И. *Изопериметрический метод в строительной механике: Теоретические основы изопериметрического метода* /В.И.Коробко,- М. Изд-воАСВ, 1997 -390 с.
4. Павленко, А.А. *Определение основной частоты колебаний пластинок с жестко защемленным контуром* // Тез. докл. научно-практ. конф. «Инженерное обеспечение агропромышленного комплекса» I А.А Павленко. - Орел: ОГСХА, 1998. -С.112- 115.
5. Коробко, А.В. *Интегральная характеристика формы в задачах строительной механики* /А.В. Коробко, И.Б. Дробин // Изв. вузов. Строительство, 1994.-№4. -С 100-104.
6. Гефель, В.В. *Развитие и применение МИКФ к решению задач технической теории пластинок, связанных с треугольной областью*. Дис. ... канд. техн. наук / В.В. Гефель. - Орел: ОрелГТУ, 2006.