УДК 662.64

ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПСЕВДООЖИЖЕННЫХ СЛОЕВ

И.В. Елюхина, Г.Ф. Кузнецов

Обсуждены вопросы, связанные с построением матрицы наблюдаемости для нелинейных систем и возникающие при отработке высокотемпературных установок, на примере топочных устройств с кипящим слоем.

При моделировании процессов в высокотемпературных реологически сложных (дисперсных и пр.) системах описание гидромеханики потока требуется дополнить учетом тепломассопереносных свойств объекта, фазовых превращений в нем и пр. Так, при экспериментальной отработке топок с кипящим слоем по измерениям температуры и составу газовой фазы по высоте слоя определяются такие величины как эффективная энергия активации процесса горения E, относительный размер горящей частицы $1/\varphi$, коэффициент диффузии K. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы между множеством измеряемых параметров и состояния, расширенным вектором оцениваемых характеристик, существовало взаимно однозначное соответствие [1].

Исследуем идентифицируемость математической модели (4.14 в [2]), включающей дифференциальные уравнения баланса окислителя в непрерывной и дискретной фазах и баланса энергии для ожижающего агента и твердой фазы. В модели проведем учет неоднородности генерации тепла на поверхности частиц топлива и поглощения окислителя по высоте слоя y путем введения нелинейной функции: степенной, экспоненциальной и пр., одним из вариантов которой является зависимость с коэффициентами α_i $(i=1\ldots4)$ как в [2]. Заметим, что чем большее число неизвестных параметров включает функция, тем с меньшей точностью они могут быть оценены из условия минимума критерия качества ввиду его овражности в пространстве этих величин и смещения минимума вдоль оси оврага при прочих равных условиях, но с другой стороны с широким набором характеристик функция более корректно аппроксимирует поведение системы. Выбор оптимального представления исходных и пр. данных входит в круг задач параметрической идентификации [1]. Проверим достаточные условия глобальной биективности отображений в терминах якобиевой матрицы. Математическую модель кипящего слоя представим в виде:

$$\frac{dU_1}{dy}=U_2;$$

$$\frac{dU_2}{dy}=\frac{1}{U_{10}\varepsilon_1}\left[\frac{1}{N-1}U_2+\frac{\beta_1\xi D}{U_9}\left(1+U_{11}y+U_{12}y^2\right)U_1+P\Pi(U_3-U_1)\right];$$

$$\frac{dU_3}{dy}=-P\Pi\left(U_3-U_1\right);\quad \frac{dU_4}{dy}=U_5;$$

$$\frac{dU_5}{dy}=\frac{-qm\xi}{U_9}\left(1+U_{13}y+U_{14}y^2\right)+\Phi B\frac{U_4}{U_9U_{10}};$$

$$\frac{dU_6}{dy}=U_7;\quad \frac{dU_7}{dy}=-\Phi B\frac{U_6}{U_9U_{10}};$$

$$\frac{dU_8}{dy}=0;\ \frac{dU_9}{dy}=0;\ \frac{dU_{10}}{dy}=0;\ \frac{dU_{11}}{dy}=0;\ \frac{dU_{12}}{dy}=0;\ \frac{dU_{13}}{dy}=0;\ \frac{dU_{14}}{dy}=0. \qquad (1)$$

Краевые условия для системы (1):

$$y=0:\ U_2=\frac{U_1-C_0}{U_{10}(N-1)};\ U_3=C_0=0{,}21;\ U_5=0;\ U_7=0;$$

$$y=1:\ \frac{dU_1}{dy}=U_2=0;\ \frac{dU_4}{dy}=U_5=-\frac{\mathrm{Pe}}{U_{10}};\ \frac{dU_6}{dy}=U_7=0. \qquad (2)$$

В (1), (2) приняты следующие обозначения (см. также [2]):

$$U_1 = C\,;\; U_2 = \frac{dC}{dy}\,;\; U_3 = C_g\,;\; U_4 = \Theta_g\,;\; U_5 = \frac{d\Theta_g}{dy}\,;\; U_6 = \Theta\,;\; U_7 = \frac{d\Theta}{dy}\,;$$

$$U_8 = E\,;\; U_9 = \frac{1}{\varphi}\,;\; U_{10} = K\,;\; U_{11} = \alpha_1\,;\; U_{12} = \alpha_2\,;\; U_{13} = \alpha_3\,;\; U_{14} = \alpha_4\,. \tag{3}$$

В системе (1) вектор состояния $\mathbf{U}$ математической модели расширен включением вектора неизвестных параметров $U_8 - U_{14}$, благодаря чему задача идентифицируемости сведена к задаче наблюдаемости вектора начальных состояний системы (1). В краевых условиях (2) не определены начальные условия для $U_8 - U_{14}$, т.е. неизвестны семь условий для системы (1). Возможность оценивания неизвестных величин из измерений температуры Θ_g по высоте слоя определяется из анализа матрицы отображений $\mathbf{J}$ [1], которая в настоящем случае в каждой строке содержит n элементов вида $\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{\,k-1}}\left(\frac{\partial \Theta_g}{\partial y}\right)$, где n – число неизвестных параметров x ($n = 7$ – для модели (1)), k, j – номер строки и столбца ($\partial\Theta_g / \partial x_j$ – для первой строки).

Функции чувствительности в матрице находятся из решения системы уравнений для функций чувствительности с нулевыми начальными условиями [1]. Для определения системы уравнений для функций чувствительности следует продифференцировать систему (1) по неизвестным параметрам $\mathbf{x}(E, \varphi, K, \alpha_i)$ и сменить порядок дифференцирования в левой части уравнений. Далее исходная система уравнений (1) и система уравнений для функций чувствительности интегрировались совместно по высоте слоя y с шагом Δy, принятым постоянным в связи с необходимостью вычисления для остальных строк матрицы Якоби производных по y от функций чувствительности. Так, для функции чувствительности $\partial\Theta_g / \partial E$ можно записать систему уравнений:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathbf{U}}{dy}\right) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial E}, \tag{4}$$

где $\mathbf{U} = [U_1 \;\; \ldots \;\; U_{14}]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{f} = [f_1 \;\; \ldots \;\; f_{14}]^{\mathrm{T}}$ в системе $d\mathbf{U}/dy = \mathbf{f}(\mathbf{U}, \mathbf{x}, y)$, с нулевыми начальными условиями, которые получаются дифференцированием краевых условий системы (1) по E. Система уравнений чувствительности для $\partial\Theta_g / \partial E = \partial U_6 / \partial U_{8*}$, где U_{8*} – начальное значение U_8, имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}}\right) = \frac{\partial U_2}{\partial U_{8*}}\,;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_2}{\partial U_{8*}}\right) = \frac{-1}{U_{10}^2 \varepsilon_1}\left[\frac{1}{N-1}U_2 + \frac{\beta_1 \xi D}{U_9}\left(1 + U_{11}y + U_{12}y^2\right)U_1^2 + P\Pi(U_3 - U_1)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial U_{10}}{\partial U_{8*}} + \frac{1}{U_{10}^2\varepsilon_1}\left[\frac{1}{N-1}\frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}} + \frac{\beta_1 D}{U_9}\left(1 + U_{11}y + U_{12}y^2\right)U_1\frac{\partial \xi}{\partial E} - \frac{\beta_1 \xi D}{U_9^2}\left(1 + U_{11}y + U_{12}y^2\right)\times\right.$$

$$\left.\times U_1\frac{\partial U_9}{\partial U_{8*}} + \frac{\beta_1 \xi D}{U_9}\left(y\frac{\partial U_{11}}{\partial U_{8*}} + y^2\frac{\partial U_{12}}{\partial U_{8*}}\right)U_1 + \frac{\beta_1 \xi D}{U_9}\left(1 + U_{11}y + U_{12}y^2\right)\frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}} + P\Pi\left(\frac{\partial U_3}{\partial U_{8*}} - \frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}}\right)\right];$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_3}{\partial U_{8*}}\right) = -P\Pi\left(\frac{\partial U_3}{\partial U_{8*}} - \frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}}\right);\; \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_4}{\partial U_{8*}}\right) = \frac{\partial U_5}{\partial U_{8*}}\,;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_5}{\partial U_{8*}}\right) = -qm\xi\left(y\frac{\partial U_{13}}{\partial U_{8*}} + y^2\frac{\partial U_{14}}{\partial U_{8*}}\right) - qm\xi\left(U_{13}y + U_{14}y^2\right)\frac{\partial \xi}{\partial U_{8*}} +$$

$$+\Phi B\frac{1}{U_9 U_{10}}\frac{\partial U_4}{\partial U_{8*}} - \Phi B\frac{U_4}{U_9^2 U_{10}}\frac{\partial U_9}{\partial U_{8*}} - \Phi B\frac{U_4}{U_9 U_{10}^2}\frac{\partial U_{10}}{\partial U_{8*}}\,;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)=\frac{\partial U_7}{\partial U_{8*}};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_7}{\partial U_{8*}}\right)=-\Phi B\frac{1}{U_9U_{10}}\frac{\partial U_4}{\partial U_{8*}}+\Phi B\frac{U_4}{U_9^2U_{10}}\frac{\partial U_9}{\partial U_{8*}}+\Phi B\frac{U_4}{U_9U_{10}^2}\frac{\partial U_{10}}{\partial U_{8*}};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_8}{\partial U_{8*}}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_9}{\partial U_{8*}}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{10}}{\partial U_{8*}}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{11}}{\partial U_{8*}}\right)=0;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{12}}{\partial U_{8*}}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{13}}{\partial U_{8*}}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{14}}{\partial U_{8*}}\right)=0. \qquad (5)$$

Система уравнений (5) решается при граничных условиях:

$$y=0:\ \frac{\partial U_3}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_5}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_7}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_2}{\partial U_{8*}}=\frac{1}{k(N-1)}\frac{\partial U_1}{\partial U_{8*}};\ \frac{\partial U_8}{\partial U_{8*}}=1;$$

$$\frac{\partial U_9}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_{10}}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_{11}}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_{12}}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_{13}}{\partial U_{8*}}=0;\ \frac{\partial U_{14}}{\partial U_{8*}}=0. \qquad (6)$$

Рассмотрим вычисление элементов первого столбца матрицы наблюдаемости $\mathbf{J}$. Так, элемент $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Theta_g}{\partial E}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)$ определяется разностным методом (например, для наглядности приведем схему с точностью $O(\Delta y^2)$):

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)\right]_l=\frac{\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l+1}-\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l-1}}{2\Delta y}+O(\Delta y^2),$$

т.е. применяется простая алгебраическая операция над решениями системы (5). Следующие элементы первого столбца находятся аналогично, например, с точностью $O(\Delta y^2)$:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)\right]_l=\frac{\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l+1}-2\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l}+\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l-1}}{\Delta y^2}+O(\Delta y^2);$$

$$\left[\frac{\partial^m}{\partial y^m}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)\right]_l=\frac{\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l+1}-\frac{\partial^{m-1}}{\partial y^{m-1}}\left(\frac{\partial U_6}{\partial U_{8*}}\right)_{l-1}}{2\Delta y}+O(\Delta y^2),(l=3,\ \ldots,6).$$

Система уравнений для определения элемента $\frac{\partial\Theta_g}{\partial\varphi}=\frac{\partial U_6}{\partial(1/U_{9*})}$ имеет вид:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\right)=\frac{\partial U_2}{\partial\varphi};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}\right)=\frac{-1}{U_{10}^2\varepsilon_1}\left[\frac{1}{N-1}U_2+\frac{\beta_1\xi D}{U_9}\left(1+U_{11}y+U_{12}y^2\right)U_1+P\Pi(U_3-U_1)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial U_{10}}{\partial\varphi}+\frac{-1}{U_{10}\varepsilon_1}\left[\frac{1}{N-1}\frac{\partial U_2}{\partial\varphi}+\beta_1\xi D\left(1+U_{11}y+U_{12}y^2\right)U_1+\frac{\beta_1\xi D}{U_9}\left(1+\frac{\partial U_{11}}{\partial\varphi}y+\frac{\partial U_{12}}{\partial\varphi}y^2\right)U_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta_1\xi D}{U_9}\left(1+U_{11}y+U_{12}y^2\right)\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}+P\Pi\left(\frac{\partial U_3}{\partial\varphi}-\frac{\partial U_1}{\partial\varphi}\right)\right];$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_3}{\partial \varphi}\right)=-P\Pi\left(\frac{\partial U_3}{\partial \varphi}-\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\right);\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_4}{\partial \varphi}\right)=\frac{\partial U_5}{\partial \varphi};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_5}{\partial \varphi}\right)=-qm\xi\left(1+U_{13}y+U_{14}y^2\right)\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}-qm\xi\left(y\frac{\partial U_{13}}{\partial \varphi}+y^2\frac{\partial U_{14}}{\partial \varphi}\right)+$$

$$+\Phi B\frac{1}{U_9U_{10}}\frac{\partial U_4}{\partial \varphi}-\Phi B\frac{U_4}{U_9^2U_{10}}\frac{\partial U_9}{\partial \varphi}-\Phi B\frac{U_4}{U_9U_{10}^2}\frac{\partial U_{10}}{\partial \varphi};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_6}{\partial \varphi}\right)=\frac{\partial U_7}{\partial \varphi};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_7}{\partial \varphi}\right)=-\Phi B\frac{1}{U_9U_{10}}\frac{\partial U_4}{\partial \varphi}+\Phi B\frac{U_4}{U_9^2U_{10}}\frac{\partial U_9}{\partial \varphi}+\Phi B\frac{U_4}{U_9U_{10}^2}\frac{\partial U_{10}}{\partial \varphi};$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_8}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_9}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{10}}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{11}}{\partial \varphi}\right)=0;$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{12}}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{13}}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_{14}}{\partial \varphi}\right)=0;$$

$$y=0:\ \frac{\partial U_2}{\partial \varphi}=\frac{1}{k(N-1)}\frac{\partial U_1}{\partial \varphi};\ \frac{\partial U_3}{\partial \varphi}=0;\ \frac{\partial U_5}{\partial \varphi}=0;\ \frac{\partial U_7}{\partial \varphi}=0;$$

$$\frac{\partial U_8}{\partial \varphi}=0;\ \frac{\partial U_9}{\partial \varphi}=-\frac{1}{\varphi^2};\ \frac{\partial U_i}{\partial \varphi}=0,(i=10,\ldots,14);$$

$$y=1:\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_4}{\partial \varphi}\right)=0;\ \frac{d}{dy}\left(\frac{\partial U_6}{\partial \varphi}\right)=0. \qquad (7)$$

Остальные элементы второго столбца матрицы вычисляются разностным методом аналогично элементам первого столбца. Системы уравнений для функций чувствительности $\partial\Theta_g/\partial K$, $\partial\Theta_g/\partial\alpha_i\ (i=1,\ldots,4)$ получаются аналогично. Функции $U_i\ (i=1,\ldots,14)$, входящие в систему уравнений (4), определяются из решения системы (1).

В терминах Якобиана для рассматриваемого процесса [2] установлены локальная и глобальная идентифицируемость [1] системы по эмпирическим данным и пригодность модели для описания рабочих процессом в высокотемпературном псевдоожиженном слое. При наличии в модели четырех параметров, описывающих нелинейности по высоте слоя, $\alpha_i\ (i=1\ldots4)$ при различных видах задаваемых функций ранг матрицы J был равен 7 и она являлась Р-матрицей. Подобный анализ важен, прежде всего, при слабой наблюдаемости исследуемых эффектов и свойств и предпочтительно его обязательное применение, особенно в многопараметрических задачах. Построенные функции чувствительности используются в дальнейшем при нахождении ковариационной матрицы ошибок оцениваемых параметров по матрице ошибок измерения, изучении точности математической модели и оптимальном планировании эксперимента.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ-Урал (№ 07-02-96016).

Литература

1. Вяткин, Г.П. Разработка методов параметрической идентификации сред Оствальда-Вейля по результатам вибрационной реометрии / Г.П. Вяткин, И.В. Елюхина // Вестник ЮУрГУ. Серия «Металлургия». - 2004. - № 8 (37). - С. 22-27.

2. Кузнецов, Г.Ф. Физико-химические процессы и технология газификации при сжигании твердых топлив / Г.Ф. Кузнецов. - Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2002. - 174 с.

Поступила 17 сентября 2007 г.