УДК 517.956.22

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

В.В. Карачик, Н.А. Антропова

Основываясь на полученном ранее представлении аналитических функций по обобщенной формуле Альманси, найдены решения уравнения Пуассона и неоднородного бигармонического уравнения в случае полиномиальной правой части.

Введение

Рассмотрим уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x), \quad x \in D, \qquad (1)$$

где правая часть $f(x)$ является аналитической в D функцией, $D \subset R^n$ звездная область с центром в начале координат. Хорошо известно, что некоторое решение уравнения (1) может быть записано в виде потенциала объемных масс [1]

$$u(x) = -\frac{1}{\omega_n}\int_D E(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \qquad (2)$$

где $E(x,\xi) = \frac{1}{n-2}|\xi - x|^{2-n}$ (при $n > 2$) элементарное решение уравнения Лапласа, а ω_n площадь единичной сферы в R^n. Однако, это красивое и полезное решение мало пригодно для вычислений. Например, при полиномиальной правой части $f(x)$ решение $u(x)$ может быть полиномом. Чтобы подсчитать это решение нужно вычислить n-кратный интеграл по D, что довольно трудно сделать. В данной работе приводятся формулы, которые упрощают нахождение решения уравнения Пуассона (1) и неоднородного бигармонического уравнения (17) в случае полиномиальной правой части $f(x)$. Следует отметить, что полученные формулы справедливы и для некоторых аналитических функций, для которых соответствующие операторные ряды сходятся.

Уравнение Пуассона

Теорема 1. Некоторое решение уравнения (1) может быть найдено в виде

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(1-\alpha)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)\,d\alpha, \qquad (3)$$

Доказательство. Определим функции $G_k(x;u)$ по формуле [2]

$$G_k(x;u) = \begin{cases} u(x), k = 0 \\ \dfrac{1}{4^k}\dfrac{|x|^{2k}}{k!}\displaystyle\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}u(\alpha x)\,d\alpha, k > 0 \end{cases},$$

где *u(x)* некоторая гармоническая в *D* функция. Поскольку *D* звездная область, то справедливо следующее разложение полинома *f(x)* [3]

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}G_i(x;v_i) = v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}v_k(\alpha x)\,d\alpha, \quad x \in D, \qquad (4)$$

где гармонические функции $v_k(x)$ задаются равенством

$$v_k(x) = \Delta^k f(x) + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2s}}{4^s\, s!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{s-1}\alpha^{s-1}}{(s-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k+s}f(\alpha x)\,d\alpha. \qquad (5)$$

В силу свойства нормиру емости сис $\{G_k(x;u) \mid k = 0,1\ldots\}$ [2] шение уравнения (4) можно записать в виде

$$u(x) = G_1(x;v_0) + G_2(x;v_1) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}G_k(x;v_{k-1}) \qquad (6)$$

ибо по определению функций $G_k(x;v)$ верны равенства $\Delta G_k(x;u)=G_{k-1}(x;u)$, а также $\Delta G_0(x;u)=0$ и значит

$$\Delta u(x)=\Delta G_1(x;v_0)+\Delta G_2(x;v_1)+=G_0(x;v_0)+\Delta G_1(x;v_1)+\ldots=f(x).$$

Перепишем решение (6) в виде

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}v_{k-1}(\alpha x)\,d\alpha.$$

Подставим в эту формулу значения $v_k(x)$ из (5). Тогда будем иметь

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)\,d\alpha+\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^{k+s}}\frac{|x|^{2(k+s)}}{k!s!}\times$$
$$\times\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!}\int_0^1\frac{(1-\beta)^{s-1}\beta^{s-1}}{(s-1)!}\beta^{n/2-1}\Delta^{k+s-1}f(\alpha\beta x)\,d\beta\,d\alpha. \qquad (7)$$

Обозначим последнюю сумму в полученном выражении через $I(x)$. Тогда получим

$$I(x)=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^{k+s}}\frac{|x|^{2k+2s}}{k!s!}\times$$
$$\times\int_0^1\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{2s+n/2-1}}{(k-1)!}\frac{(1-\beta)^{s-1}\beta^{s+n/2-2}}{(s-1)!}\Delta^{k+s-1}f(\alpha\beta x)\,d\beta\,d\alpha. \qquad (8)$$

После замены во внутреннем интеграле $\alpha\beta\to\beta$ будем иметь

$$I(x)=$$
$$=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{4^{k+s}}\frac{|x|^{2k+2s}}{k!s!}\int_0^1\int_0^{\alpha}\frac{\alpha(1-\alpha)^{k-1}(\alpha-\beta)^{s-1}}{(k-1)!(s-1)!}\beta^{n/2+s-2}\Delta^{k+s-1}f(\beta x)\,d\beta\,d\alpha.$$

Меняя порядок интегрирования в повторном интеграле и вводя обозначение

$$R(\beta)=\int_{\beta}^1\alpha(1-\alpha)^{k-1}(\alpha-\beta)^{s-1}\,d\alpha \qquad (9)$$

получим

$$I(x)=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s|x|^{2k+2s}}{4^{k+s}k!s!(k-1)!(s-1)!}\int_0^1 R(\beta)\beta^{n/2+s-2}\Delta^{k+s-1}f(\beta x)\,d\beta.$$

Вычислим функцию $R(\beta)$. Заменяя под интегралом $\alpha\to\alpha+\beta$ будем иметь

$$R(\beta)=\int_0^{1-\beta}(\alpha+\beta)(1-\alpha-\beta)^{k-1}\alpha^{s-1}\,d\alpha.$$

Заменяя опять $\alpha\to\alpha(1-\beta)$, найдем

$$R(\beta)=(1-\beta)^{k+s-1}\int_0^1(\alpha-\alpha\beta+\beta)(1-\alpha)^{k-1}\alpha^{s-1}\,d\alpha.$$

Используя теперь представление бета-функции Эйлера в виде

$$B(s,k)=\int_0^1\alpha^{s-1}(1-\alpha)^{k-1}\,d\alpha, \qquad (10)$$

после простого преобразования получим

$$R(\beta)=B(s+1,k)(1-\beta)^{s+k}+B(s,k)\beta(1-\beta)^{s+k-1}.$$

Воспользовавшись теперь связью между бета-функцией и гамма-функцией , а затем известной формулой $\Gamma(s)=(s-1)!$ выпишем

$$R(\beta)=\frac{s!(k-1)!}{(s+k)!}(1-\beta)^{s+k}+\frac{(s-1)!(k-1)!}{(s+k-1)!}\beta(1-\beta)^{s+k-1}.$$

Отсюда сразу получаем выражение для I(x)

$$I(x)=\sum_{k,s=1}^{\infty}\frac{(-1)^s}{k!}\frac{|x|^{2k+2s}}{4^{k+s}}\int_0^1\left(\frac{1}{(s+k)!(s-1)!}\beta^{s-1}(1-\beta)^{s+k}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(s+k-1)!s!}\beta^s(1-\beta)^{s+k-1}\right)\beta^{n/2-1}\Delta^{k+s-1}f(\beta x)d\beta.$$

Кратное суммирование $\sum_{l,s=1}^{\infty}$ здесь может быть взято следующим образом $\sum_{l,s=1}^{\infty}=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{l+s=l}=\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{s=1}^{l-1}$. Тогда будем иметь

$$I(x)=-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{|x|^{2l}}{4^l}\int_0^1\sum_{s=1}^{l-1}\left(\frac{(-1)^s\beta^{s-1}}{l!(s-1)!(l-s)!}(1-\beta)^l+\right.$$

$$\left.+\frac{(-1)^s\beta^s}{(l-1)!s!(l-s)!}(1-\beta)^{l-1}\right)\beta^{n/2-1}\Delta^{l-1}f(\beta x)d\beta.$$

Если обозначить в полученном выражении

$$J_1(\beta)=\frac{(1-\beta)^l}{l!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-1)^s\beta^{s-1}}{(l-s)!(s-1)!}$$

и

$$J_2(\beta)=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-1)^s\beta^s}{(l-s)!s!},$$

тогда получим

$$I(x)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{|x|^{2l}}{4^l}\int_0^1\left(J_1(\beta)+J_2(\beta)\right)\beta^{n/2-1}\Delta^{l-1}f(\beta x)d\beta. \qquad (11)$$

Вычислим суммы $J_1(\beta)$ и $J_2(\beta)$. Имеем

$$J_1(\beta)=-\frac{(1-\beta)^l}{l!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-\beta)^{s-1}}{(l-1-(s-1))!(s-1)!}=-\frac{(1-\beta)^l}{l!}\sum_{s=0}^{l-2}\frac{(-\beta)^s}{(l-1-s)!s!}=$$

$$=-\frac{(1-\beta)^l}{l!}\left[\sum_{s=0}^{l-1}\frac{(-\beta)^s}{(l-1-s)!s!}-\frac{(-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\right]=\frac{(1-\beta)^l}{l!(l-1)!}\left[(-\beta)^{l-1}-(1-\beta)^{l-1}\right]$$

и

$$J_2(\beta)=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{s=1}^{l-1}\frac{(-\beta)^s}{(l-s)!s!}=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\left[\sum_{s=0}^{l}\frac{(-\beta)^s}{(l-s)!s!}-\frac{(-\beta)^l}{l!}-\frac{1}{l!}\right]=$$

$$=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\left[\frac{(1-\beta)^l}{l!}-\frac{(-\beta)^l}{l!}-\frac{1}{l!}\right]=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!}\left[(1-\beta)^l-(-\beta)^l-1\right].$$

Отсюда

$$J_1(\beta)+J_2(\beta)=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!}\left[(1-\beta)(-\beta)^{l-1}-(1-\beta)^l+(1-\beta)^l-(-\beta)^l-1\right]=$$

$$=\frac{(1-\beta)^{l-1}}{l!(l-1)!}\left[(-\beta)^{l-1}-1\right].$$

После подстановки полученного выражения в (11), а затем замены индекса 1 на индекс k получим

$$I(x)=-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{(-1)^l}{4^l}\frac{|x|^{2l}}{l!}\int_0^1\frac{\beta^{l-1}(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\beta^{n/2-1}\Delta^{l-1}f(\beta x)d\beta-$$

$$-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{4^l}\frac{|x|^{2l}}{l!}\int_0^1\frac{(1-\beta)^{l-1}}{(l-1)!}\beta^{n/2-1}\Delta^{l-1}f(\beta x)d\beta=$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{\alpha^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)d\alpha -$$
$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)d\alpha. \quad (12)$$

Подставляя найденное значение $I(x)$ в (7) и замечая, что последняя сумма из (12) сокращается с первой суммой из (7) получим

$$u(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k}\frac{|x|^{2k}}{k!}\int_0^1\frac{\alpha^{k-1}(1-\alpha)^{k-1}}{(k-1)!}\alpha^{n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)d\alpha$$

или заменяя индекс κ на $\kappa+1$ найдем

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k+2}}{4^{k+1}k!(k+1)!}\int_0^1(1-\alpha)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)d\alpha, \quad (13)$$

что совпадает с формулой (3).

Замечание 1. Решение (3) имеет смысл и в случае аналитической в D функции $f(x)$, если соответствующий ряд сходится в D, В [3] была установлена сходимость ряда представляющего решение $u(x)$ только лишь в некоторой окрестности начала координат.

Замечание 2. Конечно же, компактная запись (2) решения уравнения Пуассона, более привлекательна, чем громоздкий операторный ряд из (3), но как показывает следующий пример, в случае когда $f(x)$ полином решение $u(x)$ находится легко.

Пример 1. Пусть правая часть в уравнении (4) имеет вид $f(x) = x_n$ тогда ряд из (13) содержит только одно слагаемое при κ - О

$$u(x) = \frac{x_i|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2}d\alpha = \frac{1}{2(n+2)}x_i|x|^2. \quad (14)$$

Проверим полученное решение

$$\Delta u(x) = \frac{1}{2(n+2)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)\left(x_i x_1^2+\ldots+x_i^3+\ldots+x_i x_n^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2(n+2)}\left(2x_i+\ldots+6x_i+\ldots+2x_i\right) = \frac{2n+4}{2(n+2)}x_i = x_i.$$

Пусть теперь, в общем случае, $f(x) = P_m(x)$, где $P_m(x)$ однородный полином степени m. Тогда верно следующее утверждение

Теорема 2. Решение уравнения (1) вида (3) при $f(x) = P_m(x)$ может быть записано в форме

$$u(x) = |x|^2\sum_{k=0}^{[m/2]+1}(-1)^k\frac{|x|^{2k}\Delta^k P_m(x)}{(2,2)_{k+1}(n+2m-2k,2)_{k+1}}, \quad (15)$$

где $(a,b)_k = a(a+b)\ldots(a+kb-b)$ обобщенный символ Похгаммера, а $[a]$ – целая часть числа a.

Доказательство. Преобразуем формулу (3). Очевидно, что в силу однородности полинома $P_m(x)$ верно равенство $\Delta^k P_m(\alpha x) = \alpha^{m-2k}\Delta^k P_m(x)$. Поэтому (3) имеет вид

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|x|^{2k}\Delta^k P_m(x)}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(1-\alpha)^k\alpha^{k+n/2-1}\alpha^{m-2k}d\alpha.$$

Принимая во внимание определение бета-функции (10) запишем

$$u(x) = \frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|x|^{2k}\Delta^k P_m(x)}{(2k)!!(2k+2)!!}B(k+1, m-k+n/2).$$

Воспользовавшись теперь соотношением $B(s,k) = \Gamma(s)\Gamma(k)/\Gamma(s+k)$, а также равенством

$$(2k)!!(2k+2)!! = 2\cdot 4^k k!(k+1)! = 2\cdot 4^k(k+1)!\Gamma(k+1)$$

найдем

$$u(x)=|x|^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+n/2)}{4^{k+1}(k+1)!\Gamma(m+n/2+1)\Gamma(k+1)}|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x).$$

После сокращения получим

$$u(x)=|x|^2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(m-k+n/2)}{4^{k+1}(k+1)!\Gamma(m+n/2+1)}|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x). \qquad (16)$$

Теперь, используя свойство гамма-функции $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ можно найти

$$\Gamma(m+n/2+1)=(m+n/2)(m+n/2-1)(m-k+n/2)\Gamma(m-k+n/2),$$

а значит, сокращая дробь в (16) на $\Gamma(m-k+n/2)$ получим

$$u(x)=|x|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2k+2)!!(n+2m)(n+2m-2k)}.$$

Наконец, вспоминая определение обобщенного символа Похгаммера запишем $(2k+2)!!=2\cdot 4(2k+2)=(2,2)_{k+1}$ и $(n+2m-2k)(n+2m)=(n+2m-2k,2)_{k+1}$, а значит

$$u(x)=|x|^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2,2)_{k+1}(n+2m-2k,2)_{k+1}}.$$

Что и требовалось доказать. □

Если теперь опять вернуться к примеру 1, то $m=1$ и при $k=0$ будем иметь $(2,2)_{k+1}(n+2m-2k,2)_{k+1|k=0}=(2,2)_1(n+2,2)_1=2(n+2)$ и значит

$$u(x)=\frac{x_i|x|^2}{2(n+2)}.$$

Бигармоническое уравнение

Рассмотрим теперь неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u=f(x),\quad x\in D. \qquad (17)$$

Теорема 3. Решение уравнения (17) может быть записано в форме

$$u(x)=\frac{|x|^4}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+4)!!}\int_0^1(1-\alpha)^{k+1}\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)d\alpha. \qquad (18)$$

Доказательство. Обозначая $\Delta u=g$ получим для $g(x)$ уравнение Пуассона (1) $\Delta g=f$ и значит согласно теореме 1

$$g(x)=\frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(\alpha-1)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)d\alpha, \qquad (19)$$

и, кроме того,

$$u(x)=\frac{|x|^2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(\alpha-1)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k g(\alpha x)d\alpha. \qquad (20)$$

Замечая, что $\Delta^k g(x)=\Delta^{k-1}f(x)$ из (20) найдем

$$u(x)=\frac{|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2-1}g(\alpha x)d\alpha+$$
$$+\frac{|x|^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(\alpha-1)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)d\alpha. \qquad (21)$$

Преобразуем первый интеграл в полученном равенстве. Используя (19) найдем

$$\frac{|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2-1}g(\alpha x)d\alpha=$$
$$=\frac{|x|^4}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\int_0^1\alpha^{2k+2+n/2-1}(1-\beta)^k\beta^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha\beta x)d\beta d\alpha=$$

$$=\frac{|x|^4}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\int_0^1\alpha(\alpha-\alpha\beta)^k(\alpha\beta)^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha\beta x)\,d(\alpha\beta)\,d\alpha.$$

Заменяя $\alpha\beta\to\beta$, а затем, меняя порядок интегрирования, получим

$$\frac{|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2-1}g(\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=\frac{|x|^4}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\int_0^\alpha\alpha(\alpha-\beta)^k\beta^{k+n/2-1}\Delta^k f(\beta x)\,d\beta\,d\alpha= \tag{22}$$

$$=\frac{|x|^4}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\int_\beta^1\alpha(\alpha-\beta)^k\,d\alpha\,\beta^{k+n/2-1}\Delta^k f(\beta x)\,d\beta.$$

Вычислим внутренний интеграл. Интеграл такого типа был уже вычислен в (9) и поэтому

$$\int_\beta^1\alpha(\alpha-\beta)^k\,d\alpha=\frac{(1-\beta)^{k+2}}{k+2}+\frac{\beta(1-\beta)^{k+1}}{k+1}.$$

Подставляя найденное значение интеграла в (22) и, меняя $\beta\to\alpha$, получим

$$\frac{|x|^2}{4}\int_0^1\alpha^{n/2-1}g(\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=\frac{|x|^4}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\left(\frac{(1-\alpha)^{k+2}}{2(2k+4)}+\frac{\alpha(1-\alpha)^{k+1}}{2(2k+2)}\right)\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)\,d\alpha.$$

Вернемся к формуле (21) и преобразуем второй интеграл. Заменим в нем $k\to k+1$

$$\frac{|x|^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1(\alpha-1)^k\alpha^{k+n/2-1}\Delta^{k-1}f(\alpha x)\,d\alpha=$$

$$=-\frac{|x|^4}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1\frac{\alpha(1-\alpha)^{k+1}}{(2k+2)(2k+4)}\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)\,d\alpha.$$

Складывая полученные интегралы найдем

$$u(x)=\frac{|x|^4}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+2)!!}\int_0^1K(\alpha)\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)\,d\alpha, \tag{23}$$

где

$$K(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^{k+2}}{2(2k+4)}+\frac{\alpha(1-\alpha)^{k+1}}{2(2k+2)}-\frac{\alpha(1-\alpha)^{k+1}}{(2k+2)(2k+4)}.$$

Вычислим функцию $K(\alpha)$. Имеем

$$K(\alpha)=\frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2}\left(\frac{1-\alpha}{2k+4}+\frac{\alpha}{2k+2}-\frac{2\alpha}{(2k+2)(2k+4)}\right)=$$

$$=\frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2}\frac{(1-\alpha)(2k+2)+\alpha(2k+4)-2\alpha}{(2k+2)(2k+4)}=$$

$$=\frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2}\frac{(2k+2)}{(2k+2)(2k+4)}=\frac{(1-\alpha)^{k+1}}{2(2k+4)}.$$

Значит, из (23) получим

$$u(x)=\frac{|x|^4}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k|x|^{2k}}{(2k)!!(2k+4)!!}\int_0^1(1-\alpha)^{k+1}\alpha^{k+n/2-1}\Delta^k f(\alpha x)\,d\alpha.$$

Что и требовалось доказать. □

Пример 2. Пусть правая часть в уравнении (17) имеет вид $f(x)=x_i$, тогда ряд из (18) содержит только одно слагаемое при $k=0$

$$u(x)=\frac{x_i\,|x|^4}{32}\int_0^1(1-\alpha)\alpha^{n/2}\,d\alpha=\frac{B(2,n/2+1)}{32}x_i\,|x|^4=$$

$$=\frac{\Gamma(2)\Gamma(n/2+1)}{32\Gamma(n/2+3)}x_i\,|x|^4=\frac{\Gamma(n/2+1)}{32(n/2+1)(n/2+2)\Gamma(n/2+1)}x_i\,|x|^4=\frac{x_i\,|x|^4}{8(n+2)(n+4)}.$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами гамма и бета функций, ранее уже применявшимися в теореме 1. Проверим полученное решение. Для этого воспользуемся равенством [2]

$$\Delta\left(|x|^s\,R_r(x)\right)=s(s+2r+n-2)\,|x|^{s-2}\,R_r(x)+|x|^s\,\Delta R_r(x),$$

где $R_r(x)$ однородный многочлен при $s=4$, $r=1$ и $R_r(x)=x_i$. Тогда будем иметь

$$v(x)=\Delta u(x)=\frac{1}{8(n+2)(n+4)}\left(4(4+2+n-2)\,|x|^2\,x_i+|x|^4\,\Delta x_i\right)=$$

$$=\frac{4(n+4)\,|x|^2\,x_i}{8(n+2)(n+4)}=\frac{|x|^2\,x_i}{2(n+2)}.$$

Полученная функция $v(x)$ совпадает с решением уравнения $\Delta v=x_i$ из примера 1 и поэтому $\Delta^2 u=x_i$.

Докажем теорему, аналогичную теореме 2.

Теорема 4. Решение уравнения (17) вида (18) при $f(x)=P_m(x)$ может быть записано в форме

$$u(x)=|x|^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)\,|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2,2)_{k+2}(n+2m-2k,2)_{k+2}}. \tag{24}$$

Доказательство. Преобразуем формулу (18) из теоремы 3. Опять воспользуемся однородностью полинома $P_m(x)$ из которой следует равенство $\Delta^k P_m(\alpha x)=\alpha^{m-2k}\Delta^k P_m(x)$. Поэтому, формула (18) имеет вид

$$u(x)=\frac{|x|^4}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2k)!!(2k+4)!!}\int_0^1(1-\alpha)^{k+1}\alpha^{k+n/2-1}\alpha^{m-2k}\,d\alpha.$$

Учитывая свойство (10) бета-функции запишем

$$u(x)=\frac{|x|^4}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2k)!!(2k+4)!!}B(k+2,m-k+n/2).$$

Воспользовавшись теперь соотношением $B(s,k)=\Gamma(s)\Gamma(k)/\Gamma(s+k)$, а также равенством

$$(2k)!!(2k+4)!!=4^{k+1}k!(k+2)!=4^{k+1}(k+2)!\Gamma(k+1)$$

получим

$$u(x)=|x|^4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\Gamma(k+2)\Gamma(m-k+n/2)}{4^{k+2}(k+2)!\Gamma(m+n/2+2)\Gamma(k+1)}|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x).$$

После сокращения найдем

$$u(x)=|x|^4\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(k+1)\Gamma(m-k+n/2)}{4^{k+2}(k+2)!\Gamma(m+n/2+2)}|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x). \tag{25}$$

Теперь, используя свойство гамма-функции $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, можно найти

$$\Gamma(m+n/2+2)=(m+n/2+1)(m+n/2)(m-k+n/2)\Gamma(m-k+n/2),$$

а значит, сокращая дробь в (24) на $\Gamma(m-k+n/2)$, получим

$$u(x)=|x|^4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(k+1)\,|x|^{2k}\,\Delta^k P_m(x)}{(2k+4)!!(n+2m+2)(n+2m-2k)}.$$

Наконец, вспоминая опять определение обобщенного символа Похгаммера запишем $(2k+4)!!=2\cdot 4(2k+4)=(2,2)_{k+2}$ и $(n+2m-2k)(n+2m+2)=(n+2m-2k,2)_{k+2}$, а значит

$$u(x) = |x|^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+1) |x|^{2k} \Delta^k P_m(x)}{(2,2)_{k+2}(n+2m-2k,2)_{k+2}}.$$

Что и требовалось доказать. □

Если опять рассмотреть пример 2, то $m=1$ и при $\kappa = 0$ будем иметь

$$(2,2)_{k+2}(n+2m-2k,2)_{k+2|k=0} = (2,2)_2(n+2,2)_2 = 8(n+2)(n+4)$$

и значит

$$u(x) = \frac{x_i |x|^4}{8(n+2)(n+4)},$$

что совпадает с решением, полученным в примере 2.

Литература

1. Бицадзе, А,В. Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. - М: Наука, 1976. - 336 с.

2. Karachik, V.V. Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications / V.V. Karachik // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2003. - Vol. 287, № 2. - P. 577-592.

3. Карачик, В.В. Об одном представлении аналитических функций / В.В. Карачик // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». - 2007. - Вып. 8. - № 3(75). - С. 15-23.

Поступила в редакцию 21 июня 2007 г.