

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕОБХОДИМОГО ПРИЗНАКА СУЩЕСТВОВАНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ МЕЖДУ ДВУМЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

О.Г. Завьялов, Ю.В. Павлова

Рассмотрен метод построения тонкого слоя между двумя поверхностями. Сформулированы необходимые условия для формирования тонкого слоя между двумя поверхностями. Доказано, что если одна из поверхностей эллиптическая, то такой же должна быть другая поверхность. Если же одна из поверхностей эллиптическая, а другая поверхность гиперболическая, то отношение гауссовых кривизн будет отрицательным и условие существования тонкого слоя между поверхностями не будет выполняться.

1. Введение

Одним из важных вопросов в теории смазки является вопрос формирования тонкого слоя между двумя поверхностями. Этот вопрос остается важным при решении задачи Капицы о качении шара по поверхности, при рассмотрении взаимодействия клина и иглы с деформируемой поверхностью. В приведенной работе формулируется и доказывается необходимые условия формирования тонкого слоя между двумя поверхностями.

2. Постановка задачи и вывод необходимого условия для формирования тонкого слоя

Рассмотрим один из методов построения тонкого слоя между двумя поверхностями.

Пусть задана поверхность с уравнением

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2). \quad (0)$$

Это может быть сфера единичного радиуса с центром в точке O . Определим единичный вектор нормали к поверхности в точке A

$$\vec{n} = \vec{n}(x^1, x^2) \quad (2)$$

и построим вектор, отложенный от центра сферы (рис. 1).

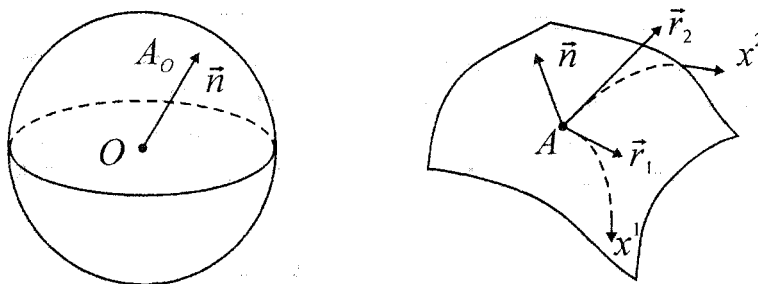


Рис. 1

Касательные плоскости, построенные в точке A поверхности и в точке A_0 сферы, будут параллельными. Направляющими векторами для касательной плоскости поверхности в точке A будут базисные векторы

$$\vec{r}_i = \frac{d\vec{r}}{\partial x^i}, \quad (3)$$

а для сферической поверхности выбраны векторы

$$\vec{n}_i = \frac{d\vec{r}}{\partial x^i}. \quad (4)$$

Система векторов \vec{r}_i ($i = 1, 2$) компланарна системе векторов ($i = 1, 2$), то есть будут справедливы следующие линейные соотношения:

$$\vec{n}_i = \sum_{k=1}^2 m_i^k \vec{r}_k. \tag{5}$$

Умножив равенство (5) на вектор \vec{r}_i скалярно, найдем

$$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_j = \sum_{k=1}^2 m_i^k \vec{r}_k \cdot \vec{r}_j = \sum_{k=1}^2 m_i^k q_{kj}. \tag{6}$$

Из равенства [1]

$$\vec{n}_i \cdot \vec{r}_j = -b_{ij}, \tag{7}$$

получим

$$-b_{ij} = \sum_{k=1}^2 m_i^k q_{kj} = m_{ij}. \tag{8}$$

С учетом (8) приходим к формуле Вейнгартена

$$\vec{n}_i = -\sum_{l=1}^2 b_i^l \vec{r}_l. \tag{9}$$

Компоненты

$$\gamma_{ij} = \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j, \tag{10}$$

являются компонентами метрического тензора сферы. Квадрат линейного элемента, то есть первая квадратичная форма сферы будет такой:

$$\delta s_0^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \gamma_{ij} \delta x^i \delta x^j. \tag{11}$$

Коэффициенты (10) можем записать в виде

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 b_i^k b_j^l q_{kl} = \sum_{k=1}^2 b_i^k b_{kj}. \tag{12}$$

Для поверхности были введены два тензора с компонентами g_{ij} и b_{ij} . Построим третий тензор с компонентами γ_{ij} , причем согласно (12), компоненты вновь построенного тензора являются сверткой тензора с компонентами b_{ij} , при этом

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \tag{13}$$

Таким образом, имеем

$$\gamma_{ij} - 2Hb_{ij} + Kq_{ij} = 0, \tag{14}$$

где H, K - средняя и полная кривизна поверхности. Теперь возьмем вторую поверхность с уравнением

$$\vec{R} = \vec{R}(y^1, y^2). \tag{15}$$

Единичный вектор нормали второй поверхности обозначим

$$\vec{N} = \vec{N}(y^1, y^2). \tag{16}$$

Базисные векторы поверхности равны:

$$\vec{R}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial y_i} \quad (i=1,2). \tag{17}$$

При смещении по некоторой кривой из точки B в точку B' вектор \vec{N} имеет приращение $\delta \vec{N}$ (рис. 2), при этом касательная плоскость повернется на угол $\delta\varphi$, равный

$$\delta\varphi = |\delta \vec{N}|, \tag{18}$$

отсюда следует, что квадрат $\delta\varphi^2$ равен

$$\delta\varphi^2 = |\delta \vec{N}|^2 = \delta \vec{N} \cdot \delta \vec{N}. \tag{19}$$

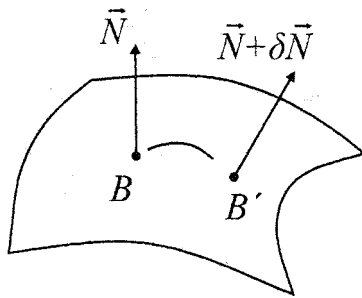


Рис. 2

Вектор $\delta \vec{N}$ разложим по базисным векторам \vec{R}_i

$$\delta \vec{N} = \sum_{i=1}^2 R_i \delta y^i \tag{20}$$

Базисные вектора \vec{R}_i компланарны векторам \vec{N}_i

$$\vec{N}_i = \sum_{k=1}^2 M_i^k \vec{r}_k, \tag{21}$$

так что разложение (20) можно заменить разложением такого вида:

$$\delta \vec{N} = \sum_{i=1}^2 \vec{N}_i \delta y^i. \tag{22}$$

Третья квадратичная форма поверхности запишется

$$\delta \varphi^2 = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \Gamma_{ij} \delta y^i \delta y^j, \tag{23}$$

где $\Gamma_{ij} = \vec{N}_i \vec{N}_j$ ($i, j = 1, 2$).

Итак, каждая из рассматриваемых поверхностей имеет три квадратичные формы, причем для второй поверхности их можно записать в виде:

$$\delta S^2 = \delta \vec{R}^2, \quad \delta l = -\frac{1}{2} \delta \vec{R} \cdot \delta \vec{N}, \quad \delta \varphi^2 = \delta \vec{N} \cdot \delta \vec{N}. \tag{24}$$

Первая квадратичная форма определяет квадрат расстояния между двумя выбранными точками B и B' по некоторой кривой поверхности; вторая - расстояние от точки B до касательной плоскости в точке B ; третья - квадрат угла поворота между касательными плоскостями в точках B и B' .

Вернемся к первой поверхности. Вектор $\delta \vec{n}$ может быть получен, если к вектору $\delta \vec{r}$ применить линейный оператор L

$$\delta \vec{n} = L \delta \vec{r}. \tag{25}$$

Линейный оператор (25) построим так, чтобы он переводил неколлинеарные векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 в векторы \vec{n}_1 и \vec{n}_2 соответственно

$$L \vec{r}_1 = \vec{n}_1, \quad L \vec{r}_2 = \vec{n}_2. \tag{26}$$

Линейный оператор L оказывается самосопряженным, так как справедливо равенство

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{n}_2 = \vec{r}_1 \cdot L \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot L \vec{r}_1 = \vec{r}_2 \cdot \vec{n}_1. \tag{27}$$

Запишем теперь равенство

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta S} = L \left(\frac{\delta \vec{r}}{\delta S} \right). \tag{28}$$

Производная по дуговой координате S

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta S} = \vec{\tau} \tag{29}$$

представляет собой касательный вектор к выбранной кривой единичной длины.

Обозначим \vec{e}_1 и \vec{e}_2 - единичные векторы по главным направлениям линейного оператора L и запишем

$$\frac{\delta \vec{r}}{\delta S} = \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, \quad (30)$$

где φ – угол между вектором \vec{e}_1 и вектором \vec{r} .

С учетом разложения (4.30) равенство (4.28) запишем в таком виде:

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta S} = L(\vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi) = \cos \varphi L\vec{e}_1 + \sin \varphi L\vec{e}_2. \quad (31)$$

Так как для главных значений линейного оператора справедливы равенства

$$L(\vec{e}_1) = \lambda_1 \vec{e}_1, \quad L(\vec{e}_2) = \lambda_2 \vec{e}_2, \quad (32)$$

то производную от вектора \vec{n} по дуговой координате S можем представить в виде

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta S} = \lambda_1 \cos \varphi \vec{e}_1 + \lambda_2 \sin \varphi \vec{e}_2. \quad (33)$$

Обозначив кривизну нормального сечения поверхности K и учитывая, что

$$K = -\frac{\delta \vec{r}}{\delta S} \cdot \frac{\delta \vec{n}}{\delta S}, \quad (34)$$

найдем

$$K = -\lambda_1 \cos^2 \varphi - \lambda_2 \sin^2 \varphi. \quad (35)$$

Собственные значения линейного оператора L равны

$$-\lambda_1 = K_1, \quad -\lambda_2 = K_2, \quad (36)$$

а собственные векторы определяют главные направления поверхности. С учетом (4.36) получим формулы Эйлера

$$K = K_1 \cos^2 \varphi - K_2 \sin^2 \varphi.$$

Выпишем следующие производные:

$$\begin{aligned} \frac{\delta \vec{r}}{\delta S} &= \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2, \\ \frac{\delta \vec{n}}{\delta S} &= -k_1 \cos \varphi \vec{e}_1 - k_2 \sin \varphi \vec{e}_2. \end{aligned} \quad (38)$$

Умножив первую формулу (38) на k_1 и складывая почленно со второй, найдем

$$\frac{\delta \vec{n}}{\delta S} + k_1 \frac{\delta \vec{r}}{\delta S} = (k_1 - k_2) \sin \varphi \vec{e}_2$$

или

$$\delta \vec{n} + k_1 \delta \vec{r} = (k_1 - k_2) \sin \varphi \vec{e}_2 \delta S.$$

Вектор $\delta \vec{n} + k_1 \delta \vec{r}$ коллинеарен вектору \vec{e}_2 . Аналогично векторы $\delta \vec{n} + k_2 \delta \vec{r}$ и \vec{e}_1 также коллинеарны. Так как выполняется условие $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$, то скалярное произведение векторов $\delta \vec{n} + k_1 \delta \vec{r}$ и $\delta \vec{n} + k_2 \delta \vec{r}$ также будет равно нулю

$$(\delta \vec{n} + k_1 \delta \vec{r}) \cdot (\delta \vec{n} + k_2 \delta \vec{r}) = 0. \quad (40)$$

Равенство (40) преобразуем к виду

$$\delta \vec{n} \cdot \delta \vec{n} + (k_1 + k_2) \delta \vec{n} \cdot \delta \vec{r} + k_1 k_2 \delta \vec{r} \cdot \delta \vec{r} = 0. \quad (41)$$

Так как выполняются равенства

$$\delta \varphi^2 = \delta \vec{n} \cdot \delta \vec{n}, \quad \delta l = -\frac{1}{2} \delta \vec{n} \cdot \delta \vec{r}, \quad \delta S^2 = \delta \vec{r} \cdot \delta \vec{r},$$

то между тремя квадратичными формами существует связь

$$\delta \varphi^2 - 2(k_1 + k_2) \delta l + k_1 k_2 \delta S^2 = 0. \quad (42)$$

Аналогичная связь имеется между коэффициентами трех форм (14).

Рассмотрим слой, образованный двумя поверхностями. Вторая поверхность получена из первой поверхности смещением точек поверхности по нормали на некоторую величину $h = h(x^1, x^2)$. Поэтому обе поверхности имеют общую параметризацию

$$\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2); \quad \vec{R} = \vec{R}(x^1, x^2) = \vec{r}(x^1, x^2) + \vec{h}(x^1, x^2). \tag{43}$$

Произведем сферическое отображение поверхностей (рис. 3). Допустим, что для точек A и B поверхностей векторы оказались коллинеарными, причем скалярное произведение векторов $\vec{n} \cdot \vec{N} = 1$. Третья квадратичная форма поверхности для сферы является первой квадратичной формой. При сферическом отображении точка A поверхности переходит в точку A_0 на сфере (рис. 4). Касательная плоскость поверхности переходит в касательную плоскость сферы, поэтому

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \alpha \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \quad \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \beta \vec{R}_1 \times \vec{R}_2. \tag{44}$$

Умножив векторно обе части равенств (44) на $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ и $\vec{R}_1 \times \vec{R}_2$ соответственно, получим

$$\begin{vmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{n}_2 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{n}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{n}_2 \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1 & \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \\ \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1 & \vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \vec{R}_1 \cdot \vec{N}_1 & \vec{R}_1 \cdot \vec{N}_2 \\ \vec{R}_2 \cdot \vec{N}_1 & \vec{R}_2 \cdot \vec{N}_2 \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_1 & \vec{R}_1 \cdot \vec{R}_2 \\ \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_1 & \vec{R}_2 \cdot \vec{R}_2 \end{vmatrix}. \tag{45}$$

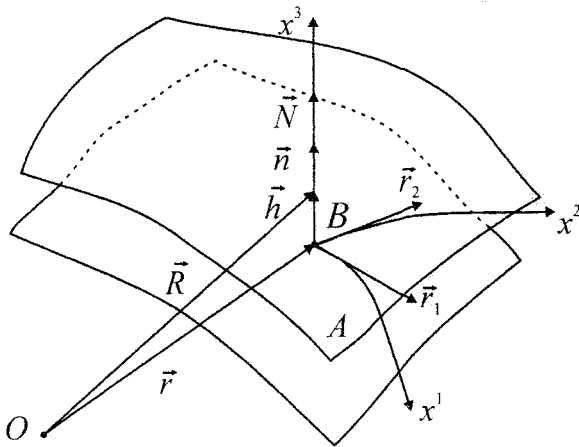


Рис. 3

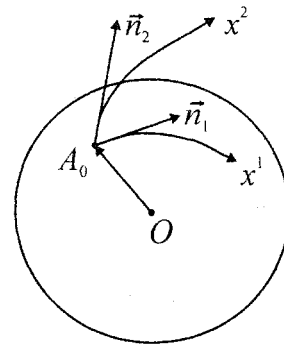


Рис. 4

Скалярные произведения, входящие в равенства (45), являются коэффициентами квадратичных форм

$$\begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -\hat{b}_{11} & -\hat{b}_{12} \\ -\hat{b}_{21} & -\hat{b}_{22} \end{vmatrix} = \beta \begin{vmatrix} \hat{g}_{11} & \hat{g}_{12} \\ \hat{g}_{21} & \hat{g}_{22} \end{vmatrix}. \tag{46}$$

Из равенств (46) определим коэффициенты α и β

$$\alpha = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}; \quad \beta = \frac{\hat{b}_{11}\hat{b}_{22} - \hat{b}_{12}^2}{\hat{g}_{11}\hat{g}_{22} - \hat{g}_{12}^2}. \tag{47}$$

Обозначим $\alpha = K$, $\beta = \hat{K}$ и равенства (48) запишем в виде

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = K \vec{r}_1 \times \vec{r}_2, \quad \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \hat{K} \vec{R}_1 \times \vec{R}_2. \tag{48}$$

Если α и β отличны от нуля, то векторы \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , а также \vec{N}_1 и \vec{N}_2 не коллинеарны.

Рассмотрим случай, когда $\vec{n} = \vec{N}$. В этом случае

$$K \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \hat{K} \vec{R}_1 \times \vec{R}_2. \tag{49}$$

Умножим равенство (49) скалярно на вектор \vec{n}

$$K (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) \cdot \vec{n} = \hat{K} (\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) \cdot \vec{N}. \tag{50}$$

Так как векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{n}$, а также $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{N}$ образуют правые тройки, то объемы, построенные на этих векторах, равны по величине площадям, построенным на базисных векторах. Поэтому отношение гауссовых кривизн должно быть положительным

$$\frac{K}{\bar{K}} > 0. \quad (51)$$

Если же $\vec{n} = -\vec{N}$, то отношение гауссовых кривизн двух поверхностей будет отрицательным.

В первом случае условие (51) является необходимым для формирования тонкого слоя между двумя поверхностями. Таким образом доказано утверждение для формирования тонкого слоя (признак впервые сформулировал Геннадий Алексеевич Завьялов).

3. Необходимый признак формирования тонкого слоя между двумя поверхностями

Если точка A и нормальным вектором \vec{n} принадлежит эллиптической поверхности, то такой же должна быть вторая поверхность с принадлежащей точкой B и нормалью $\vec{N} = \vec{n}$. Если же первая поверхность с точкой A и нормальным вектором \vec{n} эллиптическая, а другая поверхность с точкой B и нормалью $\vec{N} = -\vec{n}$ гиперболическая, то отношение гауссовых кривизн поверхностей будет отрицательным и условие формирования слоя не будет выполняться.

Литература

1. Векуа, И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек / И.Н. Векуа. - М.: Наука, 1982. - 286 с.
2. Завьялов, Г.А. Геометрия тонкого слоя / Г.А. Завьялов, О.Г. Завьялов, Ю.В. Павлова. - Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. - 130 с.

Поступила в редакцию 26 марта 2007 г.