УДК 513.83

# О ЗАМКНУТЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ В (U-ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРВОЙ КАТЕГОРИИ

*С.В. Медведев*

В заметке описывается некоторый класс нульмерных метрических пространств, которые можно вложить в качестве замкнутого нигде не плотного подмножества в u-однородное пространство первой категории.

Все пространства, рассматриваемые в статье, предполагаются нульмерными метрическими.

В классической дескриптивной теории множеств большое внимание уделяется борелевским, аналитическим и проективным множествам. В частности, для изучения некоторых свойств универсальных множеств оказались полезными топологические методы исследования. С одной стороны, универсальные множества часто обладают некоторой однородной структурой, а с другой стороны, универсальность пространства $X$ понимается с точки зрения возможности вложения в $X$ пространств, принадлежащих некоторому классу множеств. Поэтому представляет интерес описание класса пространств, которые можно вложить замкнутым образом в u-однородное пространство.

*Определения и обозначения.* Основные определения и обозначения - стандартные [1].

Нульмерное метрическое пространство называется *u-однородным*, если в нем любое непустое открыто-замкнутое подмножество содержит замкнутое подмножество, которое гомеоморфно всему пространству. Запись $X \approx Y$ означает, что пространства $X$ и $Y$ – гомеоморфные. $w(X)$ – вес пространства $X$. Чертой сверху $\overline{F}$ обозначается замыкание множества $F$ в пространстве $X$. Для индексированной системы множеств $\tau = \{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ из пространства $X$ через $|\tau|$ обозначается мощность семейства $\tau$, $\cup\tau = \cup\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$, $\mathrm{mesh}(\tau)$ – мелкость семейства $\tau$ (верхняя грань диаметров множеств из $\tau$). Используем обозначение: $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Для пространства $X$ положим $F(X) = \{Y$ – пространство: $Y$ гомеоморфно некоторому непустому замкнутому множеству из $X\}$. Пусть $LF(X) = \{Y$ – пространство: любая точка из $Y$ лежит в некоторой открыто-замкнутой окрестности, принадлежащей семейству $F(X)\}$. Далее, введем класс пространств $\sigma LF(X) = \{Y$: пространство $Y$ представимо в виде $Y = \cup\{Y_n\colon n\in\omega\}$, причем каждое множество $Y_n$ замкнуто в $Y$ и $Y_n \in LF(X)\}$. Если $\dim X = 0$, то из теоремы о счетной сумме [1, с. 293] вытекает, что $\dim Y = 0$ для любого пространства $Y\in\sigma LF(X)$. Через $H_0(X)$ обозначим семейство всех замкнутых нигде не плотных множеств из $X$. Пусть $H(X) = \{Y\colon Y \approx Z$, где $Z\in H_0(X)\}$.

**Лемма 1**. Пусть пространство $Y \in \sigma LF(X)$ для некоторого $u$-однородного пространства $X$ первой категории, причем $w(X) = k$ и $w(Y) \le k$. Тогда пространство $Y$ представимо в виде конечной или счетной суммы замкнутых множеств, каждое из которых гомеоморфно некоторому замкнутому нигде не плотному (в $X$) множеству из $X$.

*Доказательство.* По определению $Y = \cup\{Y_n\colon n\in\omega\}$, где каждое множество $Y_n$ замкнуто в $Y$ и $Y_n \in LF(X)$. Тогда $\dim Y_n = 0$ для любого $n \in \omega$.

Зафиксируем индекс $n$. Для каждой точки $y\in Y_n$ выберем такую открыто-замкнутую окрестность $U(y)$, что $U(y)\in F(X)$. В покрытие $\{U(y)\colon y\in Y_n\}$ множества $Y_n$ впишем дискретное подпокрытие $\{U_\alpha\colon \alpha\in A\}$ мощности $|A| \le k$.

Выберем дискретное покрытие $\{X_\alpha\colon \alpha\in k\}$ пространства $X$ мощности $k$. В силу $u$-однородности пространства $X$ для каждого $\alpha\in A$ существует такое замкнутое множество $Z_\alpha\subset X_\alpha$, что $U_\alpha \approx Z_\alpha$; положим $Z_n = \cup\{Z_\alpha\colon \alpha\in A\}$. Тогда множество $Z_n$ замкнуто в $X$ и $Z_n \approx Y_n$; пусть $f_n\colon Z_n\to Y_n$ – некоторый гомеоморфизм. Так как $X$ – пространство первой категории, то $X = \cup\{X_m\colon m\in\omega\}$, где каждое $X_m$ нигде не плотно в $X$, причем без ограничения общности можно считать, что каждое $X_m$ замкнуто в $X$. Тогда при любых $n$ и $m$ множество $Z_n\cap X_m$ замкнуто и нигде не плотно в $X$ (в частности, $Z_n\cap X_m$ может оказаться пустым множеством). Множества $Y_{n,m} = f_n(Z_n\cap X_m)$ замкнуты в $Y_n$, значит, и в пространстве $Y$. Но $Y_n = \cup\{Y_{n,m}: m\in\omega\}$, следовательно, $Y = \cup\{Y_{n,m}: n\in\omega, m\in\omega\}$. Счетное семейство множеств $\{Y_{n,m}: n\in\omega, m\in\omega\}$ – искомое. Лемма 1 доказана.

Опишем построение изоморфных систем остаточных множеств; похожая конструкция применялась автором в [2].

Пусть даны два нульмерных метрических пространства $X_i$ с метрикой $d_i$, $i = 1, 2$; без ограничения общности можно считать, что диаметр множества $X_i$ в метрике $d_i$ меньше 1. Пусть $F_1$ – замкнутое множество в $X_1$, $B_1$ – граница множества $F_1$, тогда $B_1\in H_0(X_1)$. В дальнейшем мы будем предполагать, что множество $B_1$ не пусто, или, эквивалентно, что множество $F_1$ не является открыто-замкнутым в $X_1$. Пусть $F_2$ – замкнутое нигде не плотное множество в $X_2$; и пусть дан гомеоморфизм $f$: $F_1\to F_2$; тогда множество $B_2 = f(B_1)\in H_0(X_2)$. При выполнении этих предположений можно построить [2] последовательность покрытий $\tau_{1,n} = \{V_{1,\alpha,n}: \alpha\in A_n\}$ множества $B_1$ и последовательность покрытий $\tau_{2,n} =\{V_{2,\alpha,n}: \alpha\in A_n\}$ множества $B_2$, которые удовлетворяет следующим условиям для любых $n\in\omega$ и $i = 1, 2$:

s1) семейство $\tau_{i,n}$ дискретно в $X_i$ и состоит из открыто-замкнутых множеств пространства $X_i$;

s2) mesh($\tau_{i,n}$) $< 2^{-n}$ в метрике $d_i$;

s3) покрытие $\tau_{i,n+1}$ измельчает покрытие $\tau_{i,n}$;

s4) $B_i\cup(X_i\setminus F_i)\subset\cup\tau_{i,0}$ ;

s5) $\cup\tau_{i,n}$ – открыто-замкнутая окрестность множества $B_i$ и $\cap\{\cup\tau_{i,n} : n\in\omega\} = B_i$;

s6) множество $U_{i,\alpha,n}=V_{i,\alpha,n}\setminus(F_i\cup(\cup\tau_{i,n+1}))$ не пусто для любого $\alpha\in A_n$; в частности, $U_{i,\alpha,n}\cap F_i =\varnothing$;

s7) $\cup\{U_{i,\alpha,n}: \alpha\in A_n, n\in\omega\} = X_i\setminus F_i$ ;

s8) mesh($\{U_{i,\alpha,n}: \alpha\in A_n, n\in\omega\}$ ) $< 2^{-n}$ в метрике $d_i$;

s9) $f(V_{1,\alpha,n}\cap B_1) = V_{2,\alpha,n}\cap B_2$ для любого $\alpha\in A_n$.

Семейство множеств $\{B_i\cap V_{i,\alpha,n}: \alpha\in A_n, n\in\omega\}$ образует обычную базу пространства $B_i$, $i = 1,2$. Семейство $\{\tau_{i,n}: n\in\omega\}$ будем называть *внешней базой* множества $F_i$, а семейство $\mathfrak{A}_i = \{U_{i,\alpha,n}: \alpha\in A_n, n\in\omega\}$ – *системой остаточных множеств* для множества $F_i$ в пространстве $X_i$ , $i = 1, 2$. Определим биекцию $\psi$: $\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ между системами остаточных множеств по правилу $\psi(U_{1,\alpha,n}) = U_{2,\alpha,n}$ для любых $\alpha\in A_n$, $n\in\omega$. В этом случае будем говорить, что системы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ остаточных множеств в пространствах $X_1$ и $X_2$ соответственно связаны биекцией $\psi$ и согласованы с гомеоморфизмом $f$: $F_1\to F_2$. Сами системы $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ будем называть *изоморфными*.

Отметим важное свойство изоморфных систем остаточных множеств [2].

**Лемма 2**. Пусть в пространстве $X_1$ дана последовательность остаточных множеств $\{U_i\in\mathfrak{A}_1: i\in\omega\}$. Выберем произвольно точки $x_i\in U_i$ и точки $y_i\in\psi(U_i)$, $i\in\omega$. Пусть точка $x\in B_1$ и $y = f(x)\in B_2$. Тогда последовательность точек $\{x_i: i\in\omega\}$ сходится к точке $x$ в пространстве $X_1$ тогда и только тогда, когда последовательность точек $\{y_i: i\in\omega\}$ сходится к точке $y$ в пространстве $X_2$.

**Лемма 3**. Пусть пространство $Y = Y_1\cup Y_2$, причем множество $Y_i$ замкнуто в $Y$ и $Y_i\in H(X)$ для некоторого $u$-однородного пространства $X$, $i = 1, 2$. Тогда $Y\in H(X)$.

*Доказательство*. Зафиксируем гомеоморфизмы $f_i$ : $Y_i\to X$ такие, что $f_i(Y_i)$ – замкнутые непересекающиеся нигде не плотные множества в $X$, $i = 1, 2$. Положим $F_1 = Y_1$; тогда границей множества $F_1$ будет множество $B_1 = Y_1\cap\overline{Y_2\setminus Y_1}$. Так как $f_1$ – гомеоморфизм, то множество $F_2 = f_1(F_1)\in H_0(X)$.

Если множество $B_1$ пустое, то множество $Y_2\setminus Y_1$ – замкнутое и искомое вложение $f$: $Y\to X$ определяется по правилу $f(y) = f_1(y)$, если $y\in Y_1$, и $f(y) = f_2(y)$, если $y\in Y_2\setminus Y_1$.

Рассмотрим случай $B_1\neq\varnothing$. Используем обозначения из определения изоморфных систем остаточных множеств. В пространстве $Y$ построим систему остаточных множеств $\mathfrak{A}_1$ для множества $F_1$, а в пространстве $X$ – систему остаточных множеств $\mathfrak{A}_2$ для множества $F_2 = f_1(F_1)$. Тогда $\cup\mathfrak{A}_1 = Y_2\setminus Y_1$. Пусть $\psi$: $\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}_2$ – соответствующая биекция между системами остаточных множеств, согласованная с гомеоморфизмом $f$: $F_1\to F_2$.

Так как пространство $X$ – $u$-однородное, то для любых индексов $\alpha\in A_n$, $n\in\omega$ существует такое гомеоморфное вложение $\varphi_{\alpha,n}$: $X\to U_{2,\alpha,n}$, что множество $Z_{\alpha,n} = \varphi_{\alpha,n}(X)$ замкнуто в $U_{2,\alpha,n}$ (а, значит, и в $X$). Можно считать, что множества $Z_{\alpha,n}$ и $f_1(Y_1)$ не пересекаются, ведь множество $f_1(Y_1)$ нигде не плотно в $X$. Каждое $U_{1,\alpha,n}$ замкнуто в $Y_2$, поэтому множество $W_{\alpha,n} = \varphi_{\alpha,n}\circ f_2(U_{1,\alpha,n})$ замкнуто в $X$ и гомеоморфно множеству $U_{1,\alpha,n}$ как композиция двух гомеоморфизмов. При фиксированном $n$ семейство $\{U_{2,\alpha,n}$: $\alpha\in A_n\}$ дискретно в пространстве $X$, поэтому множество $W_n = \cup\{W_{\alpha,n}$: $\alpha\in A_n\}$ замкнуто в $X$, гомеоморфно множеству $U_n = \cup\{U_{1,\alpha,n}$: $\alpha\in A_n\}$ и не пересекается с образом $f_1(Y_1)$.

Определим отображение $f$: $Y\to X$ следующим образом: если $y\in Y_1$, то $f(y) = f_1(y)$; если $y\in Y_2\backslash Y_1$, то $y\in U_{1,\alpha,n}$ для некоторых индексов $\alpha\in A_n$, $n\in\omega$, тогда положим $f(y) = \varphi_{\alpha,n}\circ f_2(y)$.

Из построения следует, что образ $f(Y) = f_1(Y_1)\cup(\cup\{W_n$: $n\in\omega\})$. Несложно проверить, что отображение $f$: $Y\to f(Y)$ является биекцией. Сужение отображения $f$ на замкнутое множество $Y_1$ является гомеоморфизмом по построению. Сужение $f$ на замкнутое множество $U_n$ также является гомеоморфизмом для любого $n$. Так как $U_n\cap U_m=\varnothing$ при $n\neq m$, то отображение $f$ непрерывно в точках множества $\cup\{U_n$: $n\in\omega\}$. Замыкание $\overline{Y_2\setminus Y_1} = B_1\cup(\cup\{U_n$: $n\in\omega\})$. Непрерывность отображения $f$ в точках из множества $B_1$ вытекает из леммы 2. Итак, сужения $f$ на замкнутые множества $Y_1$ и $\overline{Y_2\setminus Y_1}$ непрерывны, поэтому отображение $f$:$Y\to X$ – непрерывно. Аналогично проверяется непрерывность обратного отображения $f^{-1}$: $f(Y)\to Y$. Следовательно, $f$:$Y\to X$ – гомеоморфное вложение.

Для любых индексов $\alpha\in A_n$, $n\in\omega$ множество $U_{2,\alpha,n}\backslash W_{\alpha,n}$ является открытым как разность открытого и замкнутого множеств, поэтому множество $X\setminus f(Y) = \cup\{U_{2,\alpha,n}\setminus W_{\alpha,n}$: $\alpha\in A_n$, $n\in\omega\}$ – открытое, следовательно, образ $f(Y)$ – замкнутое множество в $X$. Для любых индексов $\alpha\in A_n$, $n\in\omega$ множество $W_{\alpha,n}$ является нигде не плотным подмножеством $U_{2,\alpha,n}$, семейство $\{U_{2,\alpha,n}$: $\alpha\in A_n$, $n\in\omega\}$ состоит из открытых не пересекающихся множеств, поэтому множество $\cup\{W_n$: $n\in\omega\} = f(Y_2\backslash Y_1)$ нигде не плотно в $X$. По построению множество $f_1(Y_1) = f(Y_1)$ нигде не плотно в $X$, следовательно, множество $f(Y) = f(Y_1)\cup f(Y_2\backslash Y_1)$ нигде не плотно в $X$ как объединение двух нигде не плотных множеств. Лемма 3 доказана.

**Теорема**. Пусть дано $u$-однородное пространство $X$ первой категории, вес $w(X) = k$. Пусть пространство $Y\in\sigma LF(X)$ и вес $w(Y)\leq k$. Тогда пространство $Y$ гомеоморфно некоторому замкнутому нигде не плотному подмножеству из пространства $X$.

*Доказательство.* По лемме 1 множество $Y = \cup\{Y_n$: $n\in\omega\}$, где каждое $Y_n$ замкнуто в $Y$ и $Y_n\approx Z_n$ для некоторого $Z_n\in H_0(X)$. Если множество индексов $\{n$: $Y_n\neq\varnothing\}$ конечное, то теорема вытекает из леммы 3, примененной последовательно конечное число раз.

Далее предполагаем, что $Y_n\neq\varnothing$ для любого $n\in\omega$. Так как $\dim Y = 0$, то можно [1, с. 357] дополнительно считать, что $Y_n\cap Y_m = \varnothing$ при $n\neq m$. Так как $X$ – пространство первой категории, то $X = \cup\{X_n$: $n\in\omega\}$, где каждое $X_n$ не пустое замкнутое нигде не плотное множество в $X$.

Построим вложение $f$: $Y\to X$ по индукции.

*База индукции.* Положим $F_1^0 = Y_0$ и $F_2^0 = Z_0$. С учетом того, что $F_2^0\in H_0(X)$ и что пространство $X$ – $u$-однородное, можно считать, что $F_2^0\cap X_0 = \varnothing$. Зафиксируем гомеоморфизм $f_0$: $F_1^0\to F_2^0$.

Если множество $F_1^0$ открыто-замкнуто в $Y$, то пусть семейство $\mathfrak{A}_1^0$ состоит из одного открыто-замкнутого множества $Y\setminus F_1^0$. В пространстве $X$ выберем открыто-замкнутое множество $\widetilde{V}$, содержащее нигде не плотное множество $X_0\cup F_2^0$ так, чтобы множество $\widehat{V} = X\setminus\widetilde{V}$ было непустым. В этом случае семейство $\mathfrak{A}_2^0$ состоит из одного множества $\widehat{V}$.

Далее рассмотрим случай, когда $F_1^0$ не является открыто-замкнутым множеством.

Так как $F_2^0 \cap X_0 = \varnothing$, то найдутся два таких непересекающихся открыто-замкнутых множества $\hat{V}$ и $\tilde{V}$, что $X_0 \subset \tilde{V}$ и $F_2^0 \subset \hat{V}$. Пусть $\mathfrak{A}_1^0 = \{U_{1,\alpha,n}^0 : \alpha \in A_n^0, n \in \omega\}$ – система остаточных множеств для множества $F_1^0$ в пространстве $Y$, а $\mathfrak{A}_2^0 = \{U_{2,\alpha,n}^0 : \alpha \in A_n^0, n \in \omega\}$ – система остаточных множеств для множества $F_2^0$ в пространстве $\hat{V}$, и $\psi_0 : \mathfrak{A}_1^0 \to \mathfrak{A}_2^0$ – биекция между ними, согласованная с гомеоморфизмом $f_0 : F_1^0 \to F_2^0$. При этом в обоих случаях $\cup \mathfrak{A}_1^0 = Y \setminus F_1^0$ и $X_0 \cap (\cup \mathfrak{A}_2^0) = \varnothing$.

*Индуктивный переход.* Допустим, что построены замкнутые множества $F_1^m$ в пространстве $Y$ и замкнутые нигде не плотные множества $F_2^m$ в пространстве $X$ и гомеоморфизмы $f_m$: $F_1^m \to F_2^m$; для которых выполняются следующие условия.

*v1)* $Y_m \subset F_1^m$;

*v2)* $\cup \mathfrak{A}_1^m = Y \setminus F_1^m$;

*v3)* $(\cup \mathfrak{A}_2^m) \cap X_m = \varnothing$; $\overline{\cup \mathfrak{A}_2^m} = (\cup \mathfrak{A}_2^m) \cup F_2^m$;

*v4)* $F_i^{m-1} \subset F_i^m$ и $\cup \mathfrak{A}_i^m \subset \cup \mathfrak{A}_i^{m-1}$, для $i = 1, 2$;

*v5)* отображение $f_m : F_1^m \to F_2^m$ совпадает с отображением $f_{m-1} : F_1^{m-1} \to F_2^{m-1}$ на множестве $F_1^{m-1}$;

*v6)* $\psi_m : \mathfrak{A}_1^m \to \mathfrak{A}_2^m$ – биекция между объединениями соответствующих систем остаточных множеств, согласованная с гомеоморфизмом $f_m$: $F_1^m \to F_2^m$.

Сделаем следующий шаг (переход от $m$ к $m$+1).

Зафиксируем остаточное множество $U \in \mathfrak{A}_1^m$. Пусть $j = \min\{i : Y_i \cap U \neq \varnothing\}$. По индуктивному предположению $\cup\{Y_i : i \leq m\} \subset F_1^m$ и $F_1^m \cap U = \varnothing$, поэтому $j > m$. Пусть $F_{1,U} = Y_j \cap U$. Возможны два случая: граница $B_{1,U}$ множества $F_{1,U}$ является пустым или непустым множеством. Если $B_{1,U} = \varnothing$, то будем считать, что семейство $\mathfrak{A}_{1,U}$ состоит из одного открыто-замкнутого множества $U \setminus F_{1,U}$. В множестве $\psi_m(U)$ выберем открыто-замкнутое множество $\tilde{V}$, содержащее нигде не плотное множество $X_m \cup f_m(F_{1,U})$ так, чтобы множество $\hat{V} = \psi_m(U) \setminus \tilde{V}$ было бы непустым. В качестве семейства $\mathfrak{A}_{2,U}$ возьмем множество $\hat{V}$.

Далее рассмотрим случай, когда граница $B_{1,U} \neq \varnothing$. Так как $X_m$ – нигде не плотное множество, то остаточное множество $\psi_m(U)$ можно разбить на два непустых открыто-замкнутых подмножества $\tilde{V}$ и $\hat{V}$ так, чтобы $\psi_m(U) \cap X_m \subset \tilde{V}$; тогда $\hat{V} \cap X_m = \varnothing$. В силу $u$-однородности пространства $X$ множество $\hat{V}$ содержит замкнутую копию пространства $X$, следовательно, в $\hat{V}$ существует множество $F_{2,U} \in H_0(X)$, гомеоморфное $F_{1,U}$; пусть $f_U$: $F_{1,U} \to F_{2,U}$ – соответствующий гомеоморфизм. Пусть $\mathfrak{A}_{1,U}$ – система остаточных множеств для $F_{1,U}$ в пространстве $U$, а $\mathfrak{A}_{2,U}$ – система остаточных множеств для $F_{2,U}$ в пространстве $\hat{V}$, и $\psi_U$: $\mathfrak{A}_{1,U} \to \mathfrak{A}_{2,U}$ – биекция между ними, согласованная с гомеоморфизмом $f_U$. При этом $\cup \mathfrak{A}_{1,U} = U \setminus F_{1,U}$.

Пусть семейство $\mathfrak{A}_i^{m+1} = \{\mathfrak{A}_{i,U} : U \in \mathfrak{A}_1^m\}$, где $i = 1, 2$, является объединением всех систем остаточных множеств, полученных при переходе от $m$ к $m$+1; отметим, что само $\mathfrak{A}_i^{m+1}$ не будет системой остаточных множеств. Биекция $\psi_{m+1} : \mathfrak{A}_1^{m+1} \to \mathfrak{A}_2^{m+1}$ задается естественным образом: если остаточное множество $W \in \mathfrak{A}_{i,U}$ для некоторого $U \in \mathfrak{A}_1^m$, то $\psi_{m+1}(W) = \psi_U(W)$.

Определим множества $F_i^{m+1} = F_i^m \cup (\cup\{F_{i,U} : U \in \mathfrak{A}_1^m\})$, где $i = 1, 2$. Тогда $Y_{m+1} \subset F_1^{m+1}$; значит, свойство *v1*) выполняется. Свойство *v2*) выполняется: $\cup \mathfrak{A}_1^{m+1} = \cup\{U \setminus F_{1,U} : U \in \mathfrak{A}_1^m\} = Y \setminus F_1^{m+1}$, так как по индуктивному предположению $\cup\{U\colon U\in \mathfrak{A}_1^m\} = \cup\mathfrak{A}_1^m = Y\setminus F_1^m$. Вторая часть свойства $v3)$ доказывается с помощью леммы 2, а первая часть свойства $v3)$ и свойство $v4)$ проверяются непосредственно. Построим отображение $f_{m+1}\colon F_1^{m+1} \to F_2^{m+1}$ следующим образом. Если точка $y\in F_1^m$, то $f_{m+1}(y)=f_m(y)$; а если $y\in F_{1,U}$ для некоторого $U\in \mathfrak{A}_1^m$, то $f_{m+1}(y) = f_U(y)$. Поэтому свойство $v5)$ выполняется. По построению отображение $f_{m+1}$ является взаимно однозначным. Сужение $f_{m+1}$ на замкнутое множество $F_1^m$ непрерывно по индуктивному предположению, сужение $f_{m+1}$ на каждое замкнутое множество $F_{1,U}$ непрерывно по построению, а сужение $f_{m+1}$ на замыкание множества $F_i^{m+1}\setminus F_i^m$ в точках из $F_i^m$ будет непрерывным по лемме 2, следовательно, отображение $f_{m+1}$ является непрерывным. Непрерывность обратного отображения $f_{m+1}^{-1}$ устанавливается аналогично.

Итак, $f_{m+1}\colon F_1^{m+1} \to F_2^{m+1}$ – гомеоморфизм. Индуктивный переход завершен.

Пусть $F_2 = \cup\{F_2^m : m\in\omega\}$. Из условия $v1)$ следует, что $Y=\cup\{F_1^m : m\in\omega\}$. Определим отображение $f\colon Y\to X$ по формуле: $f(y) = f_m(y)$, если точка $y\in F_1^m$ для некоторого $m$. В силу свойства $v5)$ это определение является корректным. Ясно, что $f(Y) = F_2$. Так как $F_1^{m-1}\subset F_1^m$ и сужение $f$ на каждое замкнутое множество $F_1^m$ является гомеоморфизмом, то $f$ – тоже гомеоморфизм.

Проверим замкнутость множества $F_2$.

Допустим, что нашлась точка $x\in \overline{F_2}\setminus F_2$ и пусть $j=\min\{i\colon x\in X_i\}$. Из свойств $v3)$ и $v4)$ следует, что $x\notin\cup\mathfrak{A}_2^m$ при $m\geq j$, в то же время $\overline{F_2}\subset \overline{\cup\mathfrak{A}_2^j\cup F_2^j} = \cup\mathfrak{A}_2^j\cup F_2^j$, значит, $x\in F_2^j\subset F_2$. Получили противоречие с тем, $x\notin F_2$. Итак, множество $F_2$ замкнуто.

Возьмем произвольное открытое множество $W$, пересекающее множество $F_2$. Выберем номер $m=\min\{i\colon W\cap F_2^i\neq\varnothing\}$. Возможны два случая.

Первый случай: множество $W\cap B_{2,U}\neq\varnothing$ для некоторого $U\in \mathfrak{A}_1^m$ (напомним, что $B_{2,U}$ – образ границы множества $F_{1,U}$ при гомеоморфизме $f_U$). Тогда из свойств $s5)$ и $s8)$ вытекает, что множество $W\cap B_{2,U}$ содержит некоторое остаточное множество $V$ из семейства $\mathfrak{A}_2^{m+1}$, а в нем содержится непустое множество $\hat{V}$, которое не пересекается с $F_2$. Поэтому, согласно одной из характеристик нигде не плотных множеств, множество $F_2$ будет нигде не плотным в $X$.

Второй случай: множество $W\cap B_{2,U}=\varnothing$ для всех $U\in \mathfrak{A}_1^m$. Тогда $D = W\cap F_2^m$ имеет открыто-замкнутую окрестность $O_D$, которая не пересекается с замкнутым множеством $\cup\{B_{2,U}\colon U\in \mathfrak{A}_1^m\}$. В силу выбора номера $m$ можно считать, что $O_D\cap(\cup\{F_2^i : i < m\}) = \varnothing$. По построению множество $F_2^m$ нигде не плотное, поэтому внутри множества $O_D$ найдется непустое множество $\hat{V}$, которое не пересекается с $F_2^m$, а, следовательно, и $\hat{V}\cap F_2 = \varnothing$. Итак, и в этом случае множество $F_2$ оказывается нигде не плотным в $X$.

Теорема доказана.

## Литература

1. Куратовский, К. Топология / К. Куратовский. Пер. с англ. - М.: Мир, 1966. - Т. 1. - 595 с.
2. Медведев, СВ. О строении метрических /г-однородных пространств / СВ. Медведев // - В кн.: Общая топология. Отображения топологических пространств. - М.: Изд-во МГУ, 1986. - С. 77-98.

*Поступила в редакцию 6 сентября 2007 г.*