Математика

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ[1]

М.Г. Булатова

Рассмотрена обратная граничная задача математической физики. Для ее решения использован оптимальный по порядку метод проекционной регуляризации. Для приближенного решения этой задачи получены оценки погрешности.

При тепловой диагностике ракетных двигателей (см. [1]) необходим учет физических свойств, используемых композиционных материалов. Это приводит к необходимости решения обратных задач для уравнения с разрывными коэффициентами. Высокие требования, предъявляемые к точности вычислений, при решении данного класса задач, заставляют разрабатывать оптимальные методы для их решения, а также получать точные оценки погрешности этих методов.

1. Постановка задачи

$$\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2};\ 0\le x\le x_1,\ t\ge 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}=æ\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2};\ x_1\le x\le 1,\ t\ge 0, \tag{2}$$

где æ - некоторая известная положительная константа.

Предположим, что решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ удовлетворяют начальным условиям

$$u_1(x,0)=0;\ 0\le x\le x_1, \tag{3}$$

$$u_2(x,0)=0;\ x_1\le x\le 1, \tag{4}$$

а также граничным условиям

$$u_1(0,t)=f_1(t);\quad t\ge 0, \tag{5}$$

$$u_1(x_1,t)=f_2(t);\quad t\ge 0, \tag{6}$$

и условиям согласования

$$u_1(x_1,t)=u_2(x_1,t);\quad t\ge 0, \tag{7}$$

$$\lambda_1\frac{\partial u_1(x_1,t)}{\partial x}=\lambda_2\frac{\partial u_2(x_1,t)}{\partial x};\quad t\ge 0, \tag{8}$$

где λ_1 и λ_2 некоторые известные положительные константы.

Функцию $u_2(1,t)$ требуется определить.

Задача (1)-(8), следуя [2], является некорректно поставленной. Поэтому предположим, что при $f_{10}(t)$ и $f_{20}(t)\in L_2[0,\infty)$ таких, что

$$\int_0^\infty |f_{20}(t)|^2\,dt+\int_0^\infty |f_{20}'(t)|^2\,dt\le r^2, \tag{9}$$

[1] Работа поддержана грантом р_урал_а №07-01-96001

где r – известно, существуют точные решения $u_{10}(x,t)$, $u_{20}(x,t)$ задачи (1)–(8) такие, что $u_{10}(x,t)$, $\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{10}(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_{10}(x,t)}{\partial x^2} \in C([0,x_1]; L_2[0,\infty))$ и $u_{20}(x,t)$, $\frac{\partial u_{20}(x,t)}{\partial t}$, $\frac{\partial u_{20}(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_{20}(x,t)}{\partial x^2} \in C([x_1,1]; L_2[0,\infty))$ и

$$\int_0^\infty |u_{20}(1,t)|^2 dt + \int_0^\infty |u'_{20}(1,t)|^2 dt \le r_1^2, \tag{10}$$

где r_1 не известно.

Пусть точные значения функций $f_{10}(t)$ и $f_{20}(t)$ нам не известны, а вместо них даны некоторые приближения $f_{1\delta}(t), f_{2\delta}(t) \in L_2[0,\infty)$ и уровень их погрешности $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_{1\delta} - f_{10}\| \le \delta, \tag{11}$$

$$\|f_{2\delta} - f_{20}\| \le \delta. \tag{12}$$

Требуется, используя исходную информацию $f_{1\delta}, f_{2\delta}$, δ и r задачи, определить приближенное решение $u_{2\delta}(1,t)$ задачи (1)-(8) и оценить его уклонение от точного решения.

2. Сведение задачи (1)-(8) на отрезке |0,x₁] к задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

Пусть $\hat{H} = L_2[0,\infty) + iL_2[0,\infty)$ где i - мнимая единица, $L_2[0,\infty)$ı - действительное пространство.

На пространстве Я определим унитарное преобразование F

$$F(u+iv) = \frac{1}{\sqrt{2}} F_c(u) - \frac{i}{\sqrt{2}} F_s(v), \tag{13}$$

где F_c и F_s - косинус и синус преобразования.

Применяя к уравнению (1) преобразование F, определяемое формулой (13), сведем его к уравнению

$$\frac{d^2 \hat{u}_1(x,\tau)}{dx^2} - i\tau \hat{u}_1(x,\tau) = 0; \quad x \in [0,x_1], \tau \ge 0, \tag{14}$$

в котором $\hat{u}_1(x,\tau) = F[u_1(x,t) + iu_1(x,t)]$.

К уравнению (14) добавим условия

$$\hat{u}_1(0,\tau) = \hat{f}_1(\tau); \quad \tau \ge 0 \tag{15}$$

и

$$\hat{u}_1(x_1,\tau) = \hat{f}_2(\tau); \quad \tau \ge 0, \tag{16}$$

где $\hat{f}_1(\tau) = F[f_1(t) + if_1(t)]$, а $\hat{f}_2(\tau) = F[f_2(t) + if_2(t)]$.

Решая задачу (14)—(16), получим, что

$$\hat{u}_1(x,\tau) = a_1(\tau)e^{\mu_0 x\sqrt{\tau}} + b_1(\tau)e^{-\mu_0 x\sqrt{\tau}}; \quad \tau \ge 0, \tag{17}$$

где $\mu_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$.

Используя условия (15) и (16), определим коэффициенты $a_1(\tau)$ и $b_1(\tau)$

$$a_1(\tau) = \frac{e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1} \hat{f}_2(\tau) - \frac{1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}} - 1} \hat{f}_1(\tau), \tag{18}$$

$$b_1(\tau)=\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_1(\tau)-\frac{e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_2(\tau) \tag{19}$$

Из (17)–(19) следует, что

$$\hat{g}_1(\tau)=\frac{\partial\hat{u}_1(x_1,\tau)}{\partial x}=\mu_0\sqrt{\tau}\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_2(\tau)-\frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_1(\tau)\right),\ \tau\ge 0\,. \tag{20}$$

Задачу (20) представим в виде двух.

Первая из них, являющаяся сужением задачи (20) на отрезок $0\le\tau\le 1$, корректна, а вторая

$$\hat{g}_1(\tau)=\mu_0\sqrt{\tau}\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_2(\tau)-\frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_1(\tau)\right),\ \tau\ge 1 \tag{21}$$

является задачей вычисления значений неограниченного оператора.

Из (20) следует, что если $\left\|\hat{f}_1(\tau)\right\|\le 1$ и $\left\|\hat{f}_2(\tau)\right\|\le 1$, то

$$\left\|\hat{g}_1(\tau)\right\|_{L_2[0,1]}\le\frac{4}{\sqrt{2}x_1};\quad 0\le\tau\le 1\,. \tag{22}$$

Для решения задачи (21) воспользуемся изометричностью в пространстве $\hat{H}$ преобразования F, определяемого формулой (13).

Из(12)следует, что

$$\left\|\hat{f}_{20}-\hat{f}_{2\delta}\right\|\le\delta, \tag{23}$$

где $\hat{f}_{2\delta}(\tau)=F[f_{2\delta}(t)+if_{2\delta}(t)]$, $\hat{f}_{20}(\tau)=F[f_{20}(t)+if_{20}(t)]$.

Из (9) следует, что для $\hat{g}_1(\tau)$ справедливо соотношение

$$\int_0^\infty\tau^2\left|\hat{g}_1(\tau)\right|d\tau\le r^2 \tag{24}$$

Теперь для решения задачи (21), (23), (24) используем метод проекционной регуляризации, изложенный в [3, с. 41]. Этот метод, для данной задачи, заключается во введении функции $\hat{g}_1^\alpha(\tau)$, определяемой формулой

$$\hat{g}_1^\alpha(\tau)=\begin{cases}\hat{g}_1(\tau), & 1\le\tau\le\alpha\\ 0, & \tau>\alpha,\alpha>1,\end{cases} \tag{25}$$

в которой параметр α удовлетворяет уравнению

$$\frac{r}{\alpha}=\varepsilon\sqrt{\alpha} \tag{26}$$

где $\varepsilon=\dfrac{\left(1+e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}x_1}\right)^2}{1-e^{-\sqrt{2}x_1}}\delta$.

Так как на основании (23) имеем, что при $\tau\ge 1$

$$\left\|\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_{2\delta}(\tau)-\frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_{1\delta}(\tau)\right)-\left(\frac{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_2(\tau)-\frac{2e^{\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0 x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_1(\tau)\right)\right\|\le\varepsilon, \tag{27}$$

то из (24)-(27) следует, что приближенное решение $\hat{g}_{1\varepsilon}^\alpha(\tau)$ задачи (21) определяется формулой

$$\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)=\begin{cases}\hat{g}_{1\varepsilon}(\tau), & 1\le\tau\le\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2/3}\\ 0, & \tau>\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2/3},\end{cases}\tag{28}$$

где $\hat{g}_{1\varepsilon}(\tau)=\frac{e^{2\mu_0x_1\sqrt{\tau}}+1}{e^{2\mu_0x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_{2\delta}(\tau)-\frac{2e^{\mu_0x_1\sqrt{\tau}}}{e^{2\mu_0x_1\sqrt{\tau}}-1}\hat{f}_{1\delta}(\tau)$.

Теорема, сформулированная в [3] на стр. 43, утверждает, что для ф у н к ı $\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)$,ɔ е д е - ленной формулой (28), справедлива оценка

$$\left\|\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)-\hat{g}_1(\tau)\right\|_{L_2[1,\infty]}\le\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3}.\tag{29}$$

Если функцию $\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)$ продолжить на всю полуось $[0,\infty)$ формулой

$$\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)=\begin{cases}\hat{g}_{1\varepsilon}(\tau), & 0\le\tau\le\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2/3}\\ 0, & \tau>\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^{2/3},\end{cases}\tag{30}$$

то из (22) и (30) будет следовать, что

$$\left\|\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)-\hat{g}_1(\tau)\right\|_{L_2[0,\infty]}\le\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3}+\frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}.\tag{31}$$

3. Решение задачи (1) - (8) на отрезке $[x_1, 1]$

Применяя к уравнению (2) преобразование *F*, получим

$$\frac{d^2\hat{u}_2(x,\tau)}{dx^2}-\frac{1}{æ}i\tau\,\hat{u}_2(x,\tau)=0;\quad x\in[x_1,1],\ \tau\ge0,\tag{32}$$

где $\hat{u}_2(x,\tau)=F\left[u_2(x,t)+iu_2(x,t)\right]$.

Предположим, что

$$\hat{u}_2(x_1,\tau)=\hat{f}_{2\delta}(\tau);\quad \tau\ge0,\tag{33}$$

а

$$\frac{\partial\hat{u}_2(x_1,\tau)}{\partial x}=\hat{g}_{2\delta}(\tau);\quad \tau\ge0,\tag{34}$$

где $\hat{g}_{2\delta}(\tau)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\hat{g}_{1\varepsilon}^{\alpha(\varepsilon)}(\tau)$.

Из формулы (31) следует, что

$$\left\|\hat{g}_{20}-\hat{g}_{2\delta}\right\|\le\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3}+\frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}\right],\tag{35}$$

где $\hat{g}_{20}(\tau)=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\hat{g}_{10}(\tau)$.

Решая задачу (32)—(34), получим, что

$$\hat{u}_2(x,\tau)=a_2(\tau)e^{\mu_0x\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}+b_2(\tau)e^{-\mu_0x\sqrt{\frac{\tau}{æ}}};\quad \tau\ge0,\tag{36}$$

$$a_2(\tau)e^{\mu_0x_1\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}+b_2(\tau)e^{-\mu_0x_1\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}=\hat{f}_{2\delta}(\tau);\quad \tau\ge0\tag{37}$$

и

$$\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}a_2(\tau)e^{\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}-\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}b_2(\tau)e^{-\mu_0 x_1\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}=\hat{g}_{2\delta}(\tau);\quad \tau\ge 0. \tag{38}$$

Решая задачу (36)-(38), сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора

$$\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}} & \frac{1}{\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}} \\ \mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}\operatorname{sh}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}} & \operatorname{ch}\mu_0(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{f}_{2\delta}(\tau)\\ \hat{g}_{2\delta}(\tau)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}_2(\tau)\\ \hat{v}_2(\tau)\end{pmatrix}, \tag{39}$$

где $\hat{u}_2(\tau)=\hat{u}_2(1,\tau)$, а $\hat{v}_2(\tau)=\dfrac{\partial\hat{u}_2(1,\tau)}{\partial x}$ или

$$T\cdot\begin{pmatrix}\hat{f}_{2\delta}\\ \hat{g}_{2\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}_2\\ \hat{v}_2\end{pmatrix}, \tag{40}$$

где неограниченный оператор T действует из пространства $\hat{H}\times\hat{H}$ в $\hat{H}\times\hat{H}$.

Используя соответствующий унитарный оператор

$$Q=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(e^{2a}+1\right) & \frac{1}{\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}\left(e^{-2a}-1\right) \\ -\mu_0\sqrt{\frac{\tau}{æ}}\left(e^{2a}-1\right) & \left(e^{-2a}+1\right) \end{pmatrix} \tag{41}$$

в пространстве $\hat{H}\times\hat{H}$, приведем оператор Т к диагональному виду T_1

$$T_1=\begin{pmatrix}\left|e^{a}\right| & 0\\ 0 & \left|e^{-a}\right|\end{pmatrix}, \tag{42}$$

где $a=\mu_0\left(1-x_1\right)\sqrt{\frac{\tau}{æ}}$, а $\left|e^{a}\right|$ и $\left|e^{-a}\right|$ модули чисел e^{a} и e^{-a}.

Таким образом, задачу (40) сведем к задаче

$$T_1\begin{pmatrix}\tilde{f}_{2\delta}\\ \tilde{g}_{2\delta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hat{u}_2\\ \hat{v}_2\end{pmatrix}, \tag{43}$$

где $\begin{pmatrix}\tilde{f}_{2\delta}\\ \tilde{g}_{2\delta}\end{pmatrix}=Q^*\begin{pmatrix}\hat{f}_{2\delta}\\ \hat{g}_{2\delta}\end{pmatrix}$, Q^* – оператор, сопряженный Q, определяемому формулой (41), а T_1 – определен формулой (42).

Так как Q^* унитарный оператор, то из (23) и (35) следует, что

$$\left\|\tilde{f}_{2\delta}-\tilde{f}_{20}\right\|\le\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3}+\frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}\right] \tag{44}$$

и

$$\left\|\tilde{g}_{2\delta}-\tilde{g}_{20}\right\|\le\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3}+\frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}\right], \tag{45}$$

где $\begin{pmatrix}\tilde{f}_{20}\\ \tilde{g}_{20}\end{pmatrix} = Q^*\begin{pmatrix}\hat{f}_{20}\\ \hat{g}_{20}\end{pmatrix}$.

Из (42) следует, что оператор T_1 может быть представлен в виде суммы

$$T_1 = T_1' + T_1'',$$

где

$$T_1' \cdot \begin{pmatrix}\tilde{f}_{2\delta}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\hat{u}_2\\ 0\end{pmatrix} \tag{46}$$

и

$$T_1'' \cdot \begin{pmatrix}0\\ \tilde{g}_{2\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \hat{v}_2\end{pmatrix}.$$

Из(10)следует, что

$$\left\| \hat{u}_{20}(\tau)\sqrt{1+\left(\frac{\tau}{æ}\right)^2} \right\|_{\hat{H}} \le r_1. \tag{47}$$

Из формулы (47) определим оператор вложения

$$B^{-1}\hat{u}_{20}(\tau) = \sqrt{1+\left(\frac{\tau}{æ}\right)^2}\ \hat{u}_{20}(\tau), \tag{48}$$

а задачу (46) перепишем в виде операторного уравнения

$$A_1\hat{u}_2(\tau) = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}\hat{u}_2(\tau) = \tilde{f}_{2\delta}. \tag{49}$$

Обозначим через $\omega_1(\varepsilon, r_1)$ модуль непрерывности оператора A_1^{-1}, определяемого формулой (42) на множестве $\hat{M}_{r_1} = BS_{r_1}$, где $S_{r_1} = \{z : z \in \hat{H}, \|z\| \le r_1\}$, а оператор B определен формулой (41).

Тогда из [4] следует, что

$$\omega_1(\varepsilon, r_1) \sim \ln^{-2}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{50}$$

Для решения уравнения (49) используем метод проекционной регуляризации, предложенный в [4].

Для этого положим $\varepsilon_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left[\sqrt{2}r^{1/3}\varepsilon^{2/3} + \frac{4\delta}{\sqrt{2}x_1}\right]$ и при условии $\|\tilde{f}_{2\delta}\| \le 3\varepsilon_1$

$\hat{u}_{2\delta}(\tau_0) \equiv 0$,

а при $\|\tilde{f}_{2\delta}\| > 3\varepsilon_1$, определим функцию $\tilde{f}_{2\delta}^{\bar{\alpha}(\varepsilon_1)}(\tau)$ формулой

$$\tilde{f}_{2\delta}^{\bar{\alpha}(\varepsilon_1)}(\tau) = \begin{cases}\tilde{f}_{2\delta}(\tau) & \text{при } \tau \le \bar{\alpha}(\varepsilon_1)\\ 0 & \text{при } \tau > \bar{\alpha}(\varepsilon_1),\end{cases}$$

где $\bar{\alpha}(\varepsilon_1)$ определим из условия

$$\int_{\bar{\alpha}(\varepsilon_1)}^{\infty} \left|\tilde{f}_{2\delta}(\tau)\right|^2 d\tau = 9\varepsilon_1^2.$$

Приближенное решение $\hat{u}_{2\delta}(\tau)$ уравнения (49) определим формулой

$$\hat{u}_{2\delta}(\tau) = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-x_1)\sqrt{\frac{\tau}{æ}}}\tilde{f}_{2\delta}^{\bar{\alpha}(\varepsilon_1)}(\tau). \tag{51}$$

Из (49) -(51) следует существование числа l_1 такого, что

$$\left\|\hat{u}_{2\delta} - \hat{u}_{20}\right\| \le l_1 \ln^{-2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right). \tag{52}$$

Окончательно решение задачи (1)-(8) будет иметь вид

$$u_{2\delta}(1,t) = \mathrm{Re}\left(F^{-1}\left[\hat{u}_{2\delta}(\tau)\right]\right), \tag{53}$$

где F^{-1} – отображение, обратное к F, определяемому формулой (13).

Из (52) и (53) следует, что

$$\left\|u_{2\delta}(1,t) - u_{20}(1,t)\right\| \le l_1 \ln^{-2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\right).$$

Литература

1. Исаков, Г.Н. Определение характеристик тонкослойных теплозащитных покрытий из решения обратных задач тепло и массопереноса / Г.Н. Исаков, А.Я. Кузин, В.Н. Савельев, Ф.В. Ермолаев // Физика горения и взрыва. - 2003. - Т. 39, № 5. - С. 86-96.

2. Алифанов, О.М. Обратные задачи теплообмена / О.М. Алифанов. - М: Машиностроение, 1988.-279 с.

3. Танана, В.П. Методы решения операторных уравнений / В.П. Танана. - М.: Наука, 1981. - 160 с.

4. Танана, В.П. Об оптимальности по порядку метода проекционной регуляризации при решении обратных задач / В.П. Танана // Сиб. журнал инд. математики. - 2004. - Т. 7, № 2. - С.117-132.

***Поступила в редакцию** 11 мая 2007 г.*