УДК 519.837 + 659.1:517.977.5

# ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ РЕКЛАМНЫМ БЮДЖЕТОМ

***К.Н. Кудрявцев***

В работе рассматривается многошаговая модель оптимального управления рекламным бюджетом фирмы-монополиста, продвигающей на рынок две различные марки одного товара.

Ключевые слова: монополия, рекламный бюджет, оптимальное управление, многошаговая игра.

Вопросы оптимального планирования рекламного бюджета на монополизированных или олигополистических рынках изучались в работах многих зарубежных авторов. Наиболее известны из них (ставшие уже классическими) модели, построеные в [1] Sorger, [2] Sethi. Однако, как правило, все рассматриваемые модели предполагают непрерывную во времени динамику. Однако выделение бюджета на проведение рекламной компании происходит в отдельные – дискретные моменты времени, точно также как и сами рекламные акции проводятся точечно (то есть тоже дискретно). Следовательно, многошаговая дискретная математическая модель будет более точно описывать динамику управления расходами на рекламу, чем ее непрерывный вариант.

В работе рассматривается рынок, на котором монопольно доминирует одна фирма, продвигающая две марки одного и того же продукта. Примером такого рынка может являться рынок прохладительных напитков, на котором действует один производитель – монополист (например, Coca-Cola), поставляющая потребителям два вида напитков Кока-Колу и Спрайт. Изменение доли рынка $x_i$, занятого напитком $i$ $(i=1,2)$ описывается системой из двух разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\delta)x_1(t)+\rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)}-\rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)}+\frac{\delta}{2}, \\ x_2(t+1) &= (1-\delta)x_2(t)-\rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)}+\rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)}+\frac{\delta}{2}, \end{aligned} \tag{1}$$

где момент времени $t=0,1,\ldots,T-1$. Доля рынка $x_i(t+1)$, занятая продуктом $i$ $(i=1,2)$ в момент времент $t+1$ зависит от доли рынка, принадлежащей этому товару в предыдущий момент времени $x_i(t)$ и средств $u[t]=(u_1[t],u_2[t])$, затраченных на рекламную компанию.

В (1) управление рекламным бюджетом $i$-го продукта$(i=1,2)$ задается как $u_i[t]$ – объем средств, выделяемой на рекламную компанию продукта $i$ в момент времени $t$, параметр $\delta$ – коэффициент падения доли рынка продукта $i$ в следующий момент времени, если компания отказывается от расходов на его рекламу, постоянная $\rho$ – коэффициент чувствительности рынка к рекламе. В силу доминирования компании на рынке, в любой момент времени $t$ выполняется равенство $x_1(t)+x_2(t)=1$. Заданы начальные условия $x_i(0)=x_{i0}$ $(i=1,2)$.

Принимая решения о выделении средств на проведение рекламной компании продукта $i$ $(i=1,2)$, ЛПР (лицо, принимающее решение) стремится максимизировать функционал:

$$J_i(x,u_i)=\frac{m_i x_i(T)}{(1+r)^T}+\sum_{k=0}^{T-1}\frac{m_i x_i(k)-c_i u_i^2[k]}{(1+r)^k}. \tag{2}$$

В (2) константа $r$ представляет собой ставку дисконтирования, $m_i$ и $c_i$ – коэффициенты, переводящие долю рынка $x_i$ и управление $u_i$ в их «денежные» эквиваленты.

Увеличивая значение функционала (2), ЛПР с одной стороны стремится увеличить свою долю рынка, а с другой не допустить «непропорционально больших» расходов на проведение рекламной компании. В тоже время, все «доходы» и «расходы» дисконтированы к начальному моменту времени.

Процесс управления рекламным бюджетом может быть смоделирован с помощью кооперативной многошаговой игры двух лиц с побочными платежами, которая задается кортежем:

$$\left\langle \{1,2\}, \Sigma, \{U_i\}_{i=1,2}, \{J_i(x,u)\} \right\rangle. \tag{3}$$

В (3) динамика управляемой системы $\Sigma$ описывается системой разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= (1-\delta)x_1(t) + \rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)} - \rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)}, + \frac{\delta}{2} \\ x_2(t+1) &= (1-\delta)x_2(t) - \rho u_1[t]\sqrt{1-x_1(t)} + \rho u_2[t]\sqrt{1-x_2(t)} + \frac{\delta}{2}, \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \end{aligned} \tag{4}$$

при этом:

$$x_1(t) + x_2(t) = 1.$$

Время $t$ принимает дискретные значения $0,1,\ldots,T-1$, стратегия игрока i (выбор размера рекламного бюджета для товара i) представляет последовательность применяемых им во все моменты времени управлений $u_i = (u_i(0,x), u_i(1,x(1)), \ldots, u_i(T-1, x(T-1)))$. Функционал (2) представляет собой функцию выигрыша игрока i .

В качестве решения игры (3) разумно использовать понятие дележа. Такое решение позволит компании с одной стороны максимизировать выигрыш, а с другой, не допустить слишком больших затрат на рекламную компанию каждого из продвигаемых товаров.

Используя модификацию метода динамического программирования, предложенную в [3], для игры (3) был построен дележ, и ситуация $u^* = (u_1^*, u_2^*)$, $u_i^* = (u_i^*(0,x), u_i^*(1,x(1)), \ldots, u_i^*(T-1, x(T-1)))$ $(i=1,2)$, доставляющая этот дележ. А именно:

$$u_1^*[t] = \begin{cases} \dfrac{\alpha_{t+1} - \beta_{t+1}}{2c_1(1+r)} \rho \sqrt{x_2(t)}, & \alpha_{t+1} \ge \beta_{t+1} \\ 0, & \alpha_{t+1} < \beta_{t+1} \end{cases},$$

$$u_2^*[t] = \begin{cases} 0, & \alpha_{t+1} \ge \beta_{t+1} \\ -\dfrac{\alpha_{t+1} - \beta_{t+1}}{2c_2(1+r)} \rho \sqrt{x_1(t)}, & \alpha_{t+1} < \beta_{t+1} \end{cases},$$

где константы $\alpha_t$ и $\beta_t$ определяются из рекурентных формул:

$$\alpha_t = \begin{cases} m_1 + \dfrac{\alpha_{t+1}(1-\delta)}{1+r}, & \alpha_{t+1} \ge \beta_{t+1} \\ m_1 + \dfrac{(\alpha_{t+1}-\beta_{t+1})^2}{4c_2(1+r)^2}\rho^2 + \dfrac{\alpha_{t+1}(1-\delta)}{1+r}, & \alpha_{t+1} < \beta_{t+1}, \end{cases}$$

$$\beta_t = \begin{cases} m_2 + \dfrac{(\alpha_{t+1}-\beta_{t+1})^2}{4c_1(1+r)^2}\rho^2 + \dfrac{\beta_{t+1}(1-\delta)}{1+r}, & \alpha_{t+1} \ge \beta_{t+1} \\ m_2 + \dfrac{\beta_{t+1}(1-\delta)}{1+r}, & \alpha_{t+1} < \beta_{t+1}, \end{cases}$$

при этом $\alpha_T = m_1$, $\beta_T = m_2$.

С помощью численного эксперимента в пакете Maple была построена реализация оптимального управления и дележа в модельном примере.

## Библиографический список

1. Sorger, G. Competitive Dynamic Advertising: A Modification of the Case Game // Journal of Economic Dynamics and Control – V. 13 (1): 1989. – Pp. 55–80.

2. Prasad, A.; Sethi, S.P. Competitive Advertising under Uncertainty: Stochastic Differential Game Approach // Journal of Optimization Theory and Applications – V.123 (1): 2004. – Pp. 163–185.

3. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов и приложения / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев. – М.: URSS, Ленанд, 2012. – 304 с.

*К содержанию*