УДК 531.3

НОВЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОГО СИЛОВОГО АНАЛИЗА ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ

А.И. Телегин

Получены новые формулы вычисления сил и моментов сил, действующих в кинематических парах плоских рычажных механизмов (ПРМ) для заданных законов изменения обобщённых координат.

Введение. Материал статьи изложен так, что его можно изучать (пропуская доказательство утверждения 1) и применять на практике без изучения статей [1-3], продолжением которых является предлагаемая статья. В отличие от статей [1-3] здесь используется терминология теории механизмов и машин. Поэтому начнём с краткого обзора основных понятий и приведём используемые в дальнейшем сведения из механики машин [4].

Систему твёрдых тел (звеньев), образующих друг с другом подвижные соединения, называют механической системой (МС). Соединение двух соприкасающихся звеньев МС, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой (КП). Как правило, одно из звеньев МС является неподвижным или принимается за неподвижное. Такое звено называется стойкой (станиной, опорой).

Если от любого звена МС до стойки имеется единственный путь (через звенья и их КП), то такую МС называют открытой. В противном случае МС имеет контуры, т. е. МС имеет звенья, от которых до стойки существует более одного пути. Число замкнутых контуров можно определить по формуле [4] $n_0 = n_p - N$, где n_p - число КП, N - число подвижных звеньев МС. Мысленно разорвав связи одной КП или разрезав одно звено каждого контура, можно получить открытую МС. При этом разорванные связи необходимо заменить главным вектором и моментом соответствующих сил реакций. Силы реакции в КП описывают взаимодействия между конструктивными элементами КП и распределены по поверхностям или по линиям соприкосновения этих элементов. Здесь же определяются только главный вектор и главный момент всех сил взаимодействия, возникающих в КП. Силовой анализ МС основан на решении первой задачи динамики и заключается в определении движущих сил и моментов сил, а также главных векторов и моментов сил реакций в КП (включая мысленно разорванные связи) для заданных и согласованных со связями законов движения звеньев. Силовой анализ необходим для выбора и расчёта приводов МС, а также расчёта элементов КП на прочность, надёжность и долговечность.

Если звенья КП могут только вращаться относительно друг друга вокруг одной оси, жёстко связанной с ними, то такая КП называется вращательной кинематической парой (ВКП). Если звенья КП могут двигаться только поступательно относительно друг друга вдоль одной оси, жёстко связанной с ними, то такая КП называется поступательной кинематической парой (ПКП). Указанную ось называют соответственно осью ВКП или ПКП. В ПРМ оси всех ВКП должны быть взаимно параллельны, а оси ПКП - перпендикулярны осям ВКП. ВКП часто называют шарниром. ПРМ, звенья которого образуют только шарниры, называют шарнирным механизмом.

1. Векторный вид основных расчётных формул. Звено с номером i и его массу обозначим через m_{0i} (i=1, 2,..., N). Звено древовидного ПРМ (ДПРМ), т. е. после размыкания контуров, непосредственно следующее за m_{0i} на пути к стойке (к звену m_0), назовём базовым звеном (базой) для m_{0i}. Базой для m_{01} является стойка. Все остальные звенья, связанные с m_{0i}, назовём смежными звеньями для m_{0i}. Звено ДПРМ, не имеющее смежных звеньев, является концевым. В звене m_{0i} выберем полюс O_i. Через O_{0i} обозначим точку, с которой совпадает O_i до начала движения m_{0i} относительно своей базы. Точку O_{0i} назовём базовой точкой i-го звена и жестко свяжем её с базой i-го звена. Обозначим через m_j сумму массы j-го звена ДПРМ и всех его несомых звеньев. Если звенья m_{0j}, m_{0k}, ..., m_{0l} являются смежными для m_{0i}, то мысленно поместив в их базовые точки O_{0j}, O_{0k}, ..., O_{0l} массы m_j, m_k, ..., m_l соответственно, получим i-е дополненное тело (ДТ). Обозначим через C_i центр масс i-го звена, а через C_{di} – центр масс i-го ДТ. Массу i-го ДТ можно вычислять по формулам $m_i = m_{0i} + \sum\limits_{j,i} m_j = \sum\limits_{j \ge i} m_{0j}$, где $\sum\limits_{j \ge i} m_{0j}$ – знак суммирования по номерам несомых звеньев для m_{0i}, включая i-е звено; $\sum\limits_{j,i} m_j$ – знак суммирования по номерам смежных звеньев для m_{0i}. В дальнейшем используется знак суммирования $\sum\limits_{j}^{k-1} a_j$ по номерам несущей цепочки k-го звена и знак суммирования $\sum\limits_{j>i}^{k} a_j$ по номерам звеньев, несомых i-м звеном.

Пусть плоскость P (плоскость движения ПРМ), параллельно которой перемещаются звенья ПРМ, является положительно ориентированной, причем орт $\bar{k}$ системы отсчёта $O\bar{i}\bar{j}\bar{k}$ перпендикулярен этой плоскости, является ортом осей ВКП и направлен в сторону наблюдателя (исследователя). Полюс O_i звена m_{0i} выберем в плоскости, проходящей через C_{di} параллельно плоскости P. С m_{0i} жестко свяжем правую систему координат (СК) $O_i\bar{i}_i\bar{j}_i\bar{k}$.

Если i-е звено образует со своей базой ВКП, то O_i разместим на её оси и (при $O_i \ne C_{di}$) орт $\bar{i}_i$ направим от O_i к C_{di}. Обозначим $d_i = O_iC_{di} \ge 0$. Для ВКП $O_{0i} = O_i$. Если $O_i = C_{di}$, то $\bar{i}_i$ направим вдоль $\bar{i}_{i-1}$ до начала относительного вращения m_{0i} ($\bar{i}_0 = \bar{i}$).

Если i-е звено образует со своей базой ПКП, то O_i совместим с C_{di} и орт $\bar{i}_i$ направим вдоль оси этой ПКП в положительную сторону поступательного перемещения i-го звена относительно своей базы. Координату x_i точки C_{di} на оси $O_{0i}\bar{i}_i$ примем за параметр, определяющий положение i-го звена относительно своей базы.

Введём следующие обозначения:

$$x_{di} = \begin{cases} d_i & \text{– если } i\text{-е звено образует со своей базой вращательную пару,} \\ x_i & \text{– если } i\text{-е звено образует со своей базой поступательную пару;} \end{cases}$$

α_{ik} – угол, откладываемый от $\bar{i}_i$ до $\bar{i}_k$; $s_{ik} = \sin\alpha_{ik}$; $c_{ik} = \cos\alpha_{ik}$; α_i – абсолютный угол поворота i-го звена, откладываемый от $\bar{i}$ до $\bar{i}_i$; $\bar{R}_j = \overline{O_{0j-1}O_{0j}}$ – радиус-вектор с началом в базовой точке базы j-го звена и с концом в базовой точке j-го звена; R_j^x, R_j^y, R_j^z – проекции $\bar{R}_j$ на оси $O_{0j-1}\bar{i}_{j-1}$, $O_{0j-1}\bar{j}_{j-1}$, $O_{0j-1}\bar{k}$ соответственно; R_j^{xy} – проекция $\bar{R}_j$ на плоскость $O_{0j-1}\bar{i}_{j-1}\bar{j}_{j-1}$; $\bar{g}$ – ускорение свободного падения; I_k – тензор инерции k-го ДТ относительно точки O_{0k}.

Утверждение 1. Искомые относительные силовые факторы k-го звена ПРМ, т. е. сила $\bar{F}_k$ и момент силы $\bar{M}_k$ (относительно точки O_{0k}), действующие на k-е звено со стороны его базы, а также главный вектор $\bar{F}_{ri}$ и момент $\bar{M}_{ri}$ (относительно точки O_{0i}) сил реакций, действующих на i-е звено со стороны мысленно разорванных связей (при размыкании контуров), удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{cases} \overline{F}_k + \sum\limits_{i\ge k} \overline{F}_{ri} = \overline{F}_{qk} - \sum\limits_{i\ge k} \overline{F}_{bi}, & (1)\\ \overline{M}_k - \sum\limits_{j,k} \overline{M}_j + \overline{M}_{rk} + \sum\limits_{j,k} \overline{R}_j \times \sum\limits_{i\ge j} \overline{F}_{ri} = \overline{M}_{qk} - \overline{M}_{bk} - \sum\limits_{j,k} \overline{R}_j \times \sum\limits_{i\ge j} \overline{F}_{bi}, \quad k = 1, 2, ..., N, & (2)\end{cases}$$

где $\overline{F}_{bi}$, $\overline{M}_{bi}$ – заданные главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) сил, действующих на i-е звено;

$$\overline{F}_{qk} = m_k \sum_{i}^{k-1} \left[\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y \ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x \dot{\alpha}_i^2 \right) \overline{i}_i + \left(R_{i+1}^x \ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y \dot{\alpha}_i^2 \right) \overline{j}_i \right] +$$
$$+ \sum_{i\ge k} m_i \left[\left(\ddot{x}_i - x_{di} \dot{\alpha}_i^2 \right) \overline{i}_i + \left(x_{di} \ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \right) \overline{j}_i \right] - m_k \overline{g}, \tag{3}$$

$$\overline{M}_{qk} = m_k x_{dk} \sum_{i}^{k-1} \left(-s_{ik} \ddot{x}_i + R_{i+1}^{xy} s_{yik}^{i+1} \ddot{\alpha}_i + 2c_{ik} \dot{x}_i \dot{\alpha}_i + R_{i+1}^{xy} s_{xik}^{i+1} \dot{\alpha}_i^2 \right) \overline{k} + 2m_k x_{dk} \dot{x}_k \dot{\alpha}_k \overline{k} +$$
$$+ \ddot{\alpha}_k I_k \cdot \overline{k} + \dot{\alpha}_k^2 \overline{k} \times I_k \cdot \overline{k} - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i\ge j} m_i \left[\left(x_{di} \ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \right) \overline{i}_i - \left(\ddot{x}_i - x_{di} \dot{\alpha}_i^2 \right) \overline{j}_i \right] +$$
$$+ \sum_{j,k} R_j^{xy} \sum_{i\ge j} m_i \left[s_{xki}^j \left(\ddot{x}_i - x_{di} \dot{\alpha}_i^2 \right) + s_{yki}^j \left(x_{di} \ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \right) \right] \overline{k} - m_k x_{dk} \overline{i}_k \times \overline{g}, \tag{4}$$

$$s_{xik}^j = \sin(\alpha_{ik} + \varphi_{xj}), \quad s_{yik}^j = \sin(\alpha_{ik} + \varphi_{yj}), \tag{5}$$

$$\varphi_{xj} = \begin{cases} \arccos(R_j^x / R_j^{xy}) - \text{если } R_j^y \le 0, \\ -\arccos(R_j^x / R_j^{xy}) - \text{если } R_j^y > 0, \end{cases} \qquad \varphi_{yj} = \begin{cases} \arccos(R_j^y / R_j^{xy}) - \text{если } R_j^x \ge 0, \\ -\arccos(R_j^y / R_j^{xy}) - \text{если } R_j^x < 0. \end{cases}$$

Доказательство. В доказательстве утверждения 1 статьи [1] через $\overline{F}_{ri}, \overline{M}_{ri}$ обозначены главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) сил реакций в i-й КП и внешних сил, действующих на i-е звено. Выделим из $\overline{F}_{ri}, \overline{M}_{ri}$ главный вектор и момент (относительно точки O_{0i}) внешних и других заданных сил, действующих на i-е звено, и обозначим их через $\overline{F}_{bi}, \overline{M}_{bi}$. Тогда из уравнений утверждения 1 статьи [3] получим формулу (1), где

$$\overline{F}_{qk} = m_k \overline{W}_{ok} + \overline{F}_{ok} - m_k \overline{g},$$

$$\overline{W}_{ok} = \sum_{i}^{k-1} \left[\overline{W}_{ri} + 2\overline{\omega}_i \times \overline{V}_{ri} + \overline{\varepsilon}_i \times \overline{R}_{i+1} + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{R}_{i+1} \right) \right], \tag{6}$$

$$\overline{F}_{ok} = \sum_{i\ge k} \left[m_i \left(\overline{W}_{ri} + 2\overline{\omega}_i \times \overline{V}_{ri} \right) + \overline{\varepsilon}_i \times \overline{m}_i + \overline{\omega}_i \times \left(\overline{\omega}_i \times \overline{m}_i \right) \right], \tag{7}$$

$\overline{V}_{ri}, \overline{W}_{ri}$ – скорость и ускорение полюса i-го звена (точки O_i) относительно своей базовой точки O_{0i}; $\overline{\omega}_i, \overline{\varepsilon}_i$ – абсолютные угловые скорость и ускорение i-го звена; $\overline{m}_i = m_i \overline{O_{0i} C}_{di}$ – статический момент i-го ДТ относительно точки O_{0i}. Учитывая способ введения СК $O_i \overline{i}_i \overline{j}_i \overline{k}$ для i-й ПКП, получим $\overline{V}_{ri} = \dot{x}_i \overline{i}_i$, $\overline{W}_{ri} = \ddot{x}_i \overline{i}_i$, для i-й ВКП получим $\overline{\omega}_i = \dot{\alpha}_i \overline{k}$, $\overline{\varepsilon}_i = \ddot{\alpha}_i \overline{k}$. По определению $\overline{m}_i = m_i \overline{O_{0i} C}_{di} = m_i x_{di} \overline{i}_i$, $\overline{R}_{i+1} = R_{i+1}^x \overline{i}_i + R_{i+1}^y \overline{j}_i + R_{i+1}^z \overline{k}$ (заметим, что проекции $R_{i+1}^x, R_{i+1}^y, R_{i+1}^z$ вектора $\overline{R}_{i+1}$ на оси СК $O_{0i} \overline{i}_i \overline{j}_i \overline{k}$ совпадают с проекциями этого вектора на оси СК $O_i \overline{i}_i \overline{j}_i \overline{k}$). Подставим выражения для $\overline{V}_{ri}$, $\overline{W}_{ri}$, $\overline{\omega}_i$, $\overline{\varepsilon}_i$, $\overline{m}_i$, $\overline{R}_{i+1}$ в (6), (7) и выполним векторные умножения орт с учётом равенств $\overline{k} \times \overline{i}_i = \overline{j}_i$, $\overline{k} \times \overline{j}_i = -\overline{i}_i$, $\overline{k} \times \overline{k} = 0$. Получим

$$\overline{W}_{ok} = \sum_{i}^{k-1} \left\{ \ddot{x}_i \overline{i}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \overline{k} \times \overline{i}_i + \ddot{\alpha}_i \overline{k} \times \left(R_{i+1}^x \overline{i}_i + R_{i+1}^y \overline{j}_i + R_{i+1}^z \overline{k} \right) + \dot{\alpha}_i^2 \overline{k} \times \left[\overline{k} \times \left(R_{i+1}^x \overline{i}_i + R_{i+1}^y \overline{j}_i + R_{i+1}^z \overline{k} \right) \right] \right\} =$$
$$= \sum_{i}^{k-1} \left[\ddot{x}_i \overline{i}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \overline{j}_i + \ddot{\alpha}_i \left(R_{i+1}^x \overline{j}_i - R_{i+1}^y \overline{i}_i \right) - \dot{\alpha}_i^2 \left(R_{i+1}^x \overline{i}_i + R_{i+1}^y \overline{j}_i \right) \right],$$

$$\overline{F}_{ok} = \sum_{i\ge k} m_i \left[\ddot{x}_i \overline{i}_i + 2\dot{x}_i \dot{\alpha}_i \overline{k} \times \overline{i}_i + x_{di} \ddot{\alpha}_i \overline{k} \times \overline{i}_i + x_{di} \dot{\alpha}_i^2 \overline{k} \times \left(\overline{k} \times \overline{i}_i \right) \right] =$$

$$=\sum_{i\geq k} m_i\left(\ddot{x}_i\bar{i}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\,\bar{j}_i + x_{di}\ddot{\alpha}_i\bar{j}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\bar{i}_i\right).$$

Отсюда после приведения подобных при $\bar{i}_i$ и $\bar{j}_i$ получим искомую формулу (3) для $\bar{F}_{qk} = m_k\bar{W}_{ok} + \bar{F}_{ok} - m_k\bar{g}$.

Из уравнений утверждения 1 статьи [3] получим формулу (2), где

$$\bar{M}_{qk} = \bar{m}_k \times \left(\bar{W}_{ok} + \bar{W}_{rk} + 2\bar{\omega}_k \times \bar{V}_{rk}\right) + I_k \cdot \bar{\varepsilon}_k + \bar{\omega}_k \times I_k \cdot \bar{\omega}_k + \sum_{j,k} \bar{R}_j \times \bar{F}_{oj} - \bar{m}_k \times \bar{g}, \tag{8}$$

$$I_k = I_{ck} + m_{0k}\left(r_k^2E - \bar{r}_k\bar{r}_k\right) + \sum_{j,k} m_j\left(R_j^2E - \bar{R}_j\bar{R}_j\right) \tag{9}$$

– тензор инерции k-го ДТ относительно точки O_{0k}, I_{ck} – тензор инерции k-го звена относительно точки C_k, $\bar{r}_k = \overline{O_{0k}C_k}$. Подставляя в формулу (8) найденные выражения для $\bar{W}_{ok}, \bar{F}_{oj}$, а также выражения для векторов $\bar{V}_{rk}$, $\bar{W}_{rk}$, $\bar{\omega}_k$, $\bar{\varepsilon}_k$, $\bar{m}_k$, $\bar{R}_j$, получим

$$\begin{aligned}\bar{M}_{qk} = {} & m_k x_{dk}\bar{i}_k \times \sum_i^{k-1}\left[\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{i}_i + \left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{j}_i\right] + \\ & + m_k x_{dk}\bar{i}_k \times \left(\ddot{x}_k\bar{i}_k + 2\dot{x}_k\dot{\alpha}_k\bar{k} \times \bar{i}_k\right) + \ddot{\alpha}_k I_k \cdot \bar{k} + \dot{\alpha}_k^2\bar{k} \times I_k \cdot \bar{k} - m_k x_{dk}\bar{i}_k \times \bar{g} + \\ & + \sum_{j,k}\left(R_j^x\bar{i}_k + R_j^y\bar{j}_k + R_j^z\bar{k}\right) \times \sum_{i\geq j} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{i}_i + \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\bar{j}_i\right].\end{aligned} \tag{10}$$

Для $i<k$ разложим орт $\bar{i}_k$ по ортам $\bar{i}_i, \bar{j}_i$. Получим $\bar{i}_k = c_{ik}\bar{i}_i + s_{ik}\bar{j}_i$, где $c_{ik} = \cos\alpha_{ik}$, $s_{ik} = \sin\alpha_{ik}$, α_{ik} – угол от $\bar{i}_i$ до $\bar{i}_k$. Тогда $\bar{i}_k \times \bar{i}_i = \left(c_{ik}\bar{i}_i + s_{ik}\bar{j}_i\right) \times \bar{i}_i = -s_{ik}\bar{k}$, $\bar{i}_k \times \bar{j}_i = c_{ik}\bar{k}$. Следовательно, с учётом произведений $\bar{k} \times \bar{i}_i = \bar{j}_i, \bar{k} \times \bar{j}_i = -\bar{i}_i$ из (10) получим

$$\begin{aligned}\bar{M}_{qk} = {} & -m_k x_{dk}\sum_i^{k-1}\left[\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ik} - \left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)c_{ik}\right]\bar{k} + 2m_k x_{dk}\dot{x}_k\dot{\alpha}_k\bar{k} + \\ & + \ddot{\alpha}_k I_k \cdot \bar{k} + \dot{\alpha}_k^2\bar{k} \times I_k \cdot \bar{k} - m_k x_{dk}\bar{i}_k \times \bar{g} - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i\geq j} m_i\left[\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\bar{i}_i - \left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{j}_i\right] + \\ & + \sum_{j,k}\sum_{i\geq j} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)\left(R_j^x\bar{i}_k \times \bar{i}_i + R_j^y\bar{j}_k \times \bar{i}_i\right) + \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\left(R_j^x\bar{i}_k \times \bar{j}_i + R_j^y\bar{j}_k \times \bar{j}_i\right)\right].\end{aligned} \tag{11}$$

Для $i \geq k$ разложим орты $\bar{i}_i, \bar{j}_i$ по ортам $\bar{i}_k, \bar{j}_k$. Получим $\bar{i}_i = c_{ki}\bar{i}_k + s_{ki}\bar{j}_k$, $\bar{j}_i = -s_{ki}\bar{i}_k + c_{ki}\bar{j}_k$. Тогда $\bar{i}_k \times \bar{i}_i = \bar{i}_k \times \left(c_{ki}\bar{i}_k + s_{ki}\bar{j}_k\right) = s_{ki}\bar{k}$, $\bar{j}_k \times \bar{i}_i = -c_{ki}\bar{k}$, $\bar{i}_k \times \bar{j}_i = \bar{i}_k \times \left(-s_{ki}\bar{i}_k + c_{ki}\bar{j}_k\right) = c_{ki}\bar{k}$, $\bar{j}_k \times \bar{j}_i = s_{ki}\bar{k}$. Подставив эти векторные произведения в (11) и учитывая обозначения $A_{ki}^j = R_j^x c_{ki} + R_j^y s_{ki}$, $B_{ki}^j = R_j^x s_{ki} - R_j^y c_{ki}$, получим

$$\begin{aligned}\bar{M}_{qk} = {} & m_k x_{dk}\sum_i^{k-1}\left(-s_{ik}\ddot{x}_i + A_{ik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2c_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i + B_{ik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{k} + 2m_k x_{dk}\dot{x}_k\dot{\alpha}_k\bar{k} + \\ & + \ddot{\alpha}_k I_k \cdot \bar{k} + \dot{\alpha}_k^2\bar{k} \times I_k \cdot \bar{k} - m_k x_{dk}\bar{i}_k \times \bar{g} - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i\geq j} m_i\left[\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\bar{i}_i - \left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{j}_i\right] + \\ & + \sum_{j,k}\sum_{i\geq j} m_i\left[B_{ki}^j\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + A_{ki}^j\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right]\bar{k}.\end{aligned}$$

Используем известную формулу $a\sin(q) + b\cos(q) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(q+\varphi)$, где $\varphi = \arccos(a/\sqrt{a^2+b^2})$ при $b \geq 0$ и $\varphi = -\arccos(a/\sqrt{a^2+b^2})$ при $b<0$. Тогда с учётом равенства $\left(R_j^x\right)^2 + \left(R_j^y\right)^2 = \left(R_j^{xy}\right)^2$ получим

$$A_{ki}^j = R_j^x c_{ki} + R_j^y s_{ki} = R_j^{xy}\sin(\alpha_{ki} + \varphi_{yj}) = R_j^{xy}s_{yki}^j,\quad B_{ki}^j = R_j^x s_{ki} - R_j^y c_{ki} = R_j^{xy}\sin(\alpha_{ki} + \varphi_{xj}) = s_{xki}^j,$$

что с учётом обозначений (5) завершает доказательство формулы (4). *Утверждение доказано.*

Замечание 1. В утверждении 1 векторы $\overline{F}_{qk}$, $\overline{M}_{qk}$ описывают инерционные силы, которые зависят от скоростей и ускорений движения звеньев. Можно рассматривать проекции этих векторов на оси СК любого звена, включая стойку.

2. Формулы вычисления проекций инерционных сил на оси СК звеньев. В утверждении 1 $\overline{F}_k$ – сила в k-ой КП, $\overline{M}_k$ – момент силы в k-ой КП. $\overline{F}_k$ содержит для k-й ПКП две проекции динамической реакции и одну движущую силу F_k. $\overline{M}_k = M_k\left(\overline{F}_k\right)$ содержит для k-й ВКП две проекции момента реакции и движущий момент силы M_k. Движущую силу вычисляют по формуле $F_k = \overline{i}_k \cdot \overline{F}_k$. Движущий момента силы вычисляют по формуле $M_k = \overline{k} \cdot \overline{M}_k$. Поэтому для перехода от векторных соотношений утверждения 1 к скалярным соотношениям удобно рассматривать проекции векторов утверждения 1 на оси СК k-го звена и использовать

Утверждение 2. Проекции векторов $\overline{F}_{qk}$, $\overline{M}_{qk}$ на оси $O_{ok}\overline{i}_k$, $O_{ok}\overline{j}_k$, $O_{ok}\overline{k}$ СК k-го звена вычисляются по формулам

$$F_{qk}^x = m_k \sum_{i}^{k-1}\left(c_{ik}\ddot{x}_i + R_{i+1}^{xy}s_{xik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2s_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^{xy}s_{yik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + m_k\left(\ddot{x}_k - x_{dk}\dot{\alpha}_k^2\right) + \\ + \sum_{i>k} m_i\left[c_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) - s_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_k\overline{i}_k \cdot \overline{g}, \tag{12}$$

$$F_{qk}^y = m_k \sum_{i}^{k-1}\left(-s_{ik}\ddot{x}_i + R_{i+1}^{xy}s_{yik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2c_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i + R_{i+1}^{xy}s_{xik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + m_k\left(x_{dk}\ddot{\alpha}_k + 2\dot{x}_k\dot{\alpha}_k\right) + \\ + \sum_{i>k} m_i\left[s_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_k\overline{j}_k \cdot \overline{g}, \tag{13}$$

$$F_{qk}^z = -m_k\overline{k} \cdot \overline{g}, \tag{14}$$

$$M_{qk}^x = -I_k^{xz}\ddot{\alpha}_k + I_k^{yz}\dot{\alpha}_k^2 - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i \ge j} m_i\left[s_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right], \tag{15}$$

$$M_{qk}^y = -I_k^{yz}\ddot{\alpha}_k - I_k^{xz}\dot{\alpha}_k^2 + \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i \ge j} m_i\left[c_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) - s_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] + m_k x_{dk}\overline{k} \cdot \overline{g}, \tag{16}$$

$$M_{qk}^z = m_k x_{dk} \sum_{i}^{k-1}\left(-s_{ik}\ddot{x}_i + R_{i+1}^{xy}s_{yik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2c_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i + R_{i+1}^{xy}s_{xik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + I_k^z\ddot{\alpha}_k + 2m_k x_{dk}\dot{x}_k\dot{\alpha}_k + \\ + \sum_{j,k} R_j^{xy} \sum_{i \ge j} m_i\left[s_{xki}^j\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + s_{yki}^j\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_k x_{dk}\overline{j}_k \cdot \overline{g}, \tag{17}$$

где
$$I_k^{xz} = I_{ck}^{xz} + m_{0k}h_k\left(x_{dk} + a_k\right) + \sum_{j,k} m_j R_j^x R_j^z, \tag{18}$$

$$I_k^{yz} = I_{ck}^{yz} + m_{0k}b_k h_k + \sum_{j,k} m_j R_j^y R_j^z, \tag{19}$$

$$I_k^z = I_{ck}^z + m_{0k}\left[\left(x_{dk} + a_k\right)^2 + b_k^2\right] + \sum_{j,k} m_j (R_j^{xy})^2, \tag{20}$$

a_k, b_k, h_k – проекции радиус-вектора $\overline{C_{dk}C_k}$ на орты $\overline{i}_k, \overline{j}_k, \overline{k}$; $I_{ck}^{xz}, I_{ck}^{yz}, I_{ck}^z$ – элементы тензора инерции k-го звена в СК $C_k\overline{i}_k\overline{j}_k\overline{k}$, I_k^z – момент инерции k-го ДТ относительно оси $O_{0k}\overline{k}$.

Доказательство. Умножим вектор (3) скалярно на орты $\overline{i}_k, \overline{j}_k$. С учётом равенств
$\overline{i}_i \cdot \overline{i}_k = \cos\alpha_{ik} = c_{ik}, \overline{j}_i \cdot \overline{i}_k = \cos(\alpha_{ik} - \pi/2) = \sin\alpha_{ik} = s_{ik}, \overline{i}_i \cdot \overline{j}_k = \cos(\alpha_{ik} + \pi/2) = -s_{ik}, \overline{j}_i \cdot \overline{j}_k = c_{ik}$,
для $i<k$ и равенств
$\overline{i}_k \cdot \overline{i}_i = \cos\alpha_{ki} = c_{ki}, \overline{i}_k \cdot \overline{j}_i = \cos(\alpha_{ki} + \pi/2) = -\sin\alpha_{ki} = -s_{ki}, \overline{j}_k \cdot \overline{i}_i = \cos(\alpha_{ki} - \pi/2) = s_{ki}, \overline{j}_k \cdot \overline{j}_i = c_{ki}$,
для $i>k$, получим

$$F_{qk}^x = m_k \sum_{i}^{k-1}\left[\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)c_{ik} + \left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ik}\right] +$$

$$+\sum_{i\ge k} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)c_{ki} - \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)s_{ki}\right] - m_k\bar{i}_k\cdot\bar{g},$$

$$F_{qk}^y = m_k\sum_{i}^{k-1}\left[-\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ik} + \left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)c_{ik}\right] +$$

$$+\sum_{i\ge k} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ki} + \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)c_{ki}\right] - m_k\bar{j}_k\cdot\bar{g}.$$

Преобразуем первые суммы этих выражений к виду

$$F_{qk}^x = m_k\sum_{i}^{k-1}\left[c_{ik}\ddot{x}_i + \left(R_{i+1}^x s_{ik} - R_{i+1}^y c_{ik}\right)\ddot{\alpha}_i + 2s_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - \left(R_{i+1}^x c_{ik} + R_{i+1}^y s_{ik}\right)\dot{\alpha}_i^2\right] + \ldots,$$

$$F_{qk}^y = m_k\sum_{i}^{k-1}\left[-s_{ik}\ddot{x}_i + \left(R_{i+1}^x c_{ik} + R_{i+1}^y s_{ik}\right)\ddot{\alpha}_i + 2c_{ik}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i + \left(R_{i+1}^x s_{ik} - R_{i+1}^y c_{ik}\right)\dot{\alpha}_i^2\right] + \ldots .$$

Теперь, используя обозначения $R_j^x s_{ki} - R_j^y c_{ki} = R_j^{xy} s_{xki}^j$, $R_j^x c_{ki} + R_j^y s_{ki} = R_j^{xy} s_{yki}^j$, получим искомые выражения (12), (13). Здесь и в дальнейшем учитывается, что $c_{kk} = 1$, $s_{kk} = 0$. Уравнение (14) получается после скалярного умножения вектора (3) на орт $\bar{k}$.

Умножим вектор (4) скалярно на орт $\bar{i}_k$. С учётом равенств $\bar{i}_k\cdot\bar{k} = 0$, $\bar{i}_k\cdot I_k\cdot\bar{k} = -I_k^{xz}$, $\bar{i}_k\cdot\bar{k}\times I_k\cdot\bar{k} = -\bar{j}_k\cdot I_k\cdot\bar{k} = I_k^{yz}$, $\bar{i}_k\cdot\bar{i}_k\times\bar{g} = 0$, $\bar{i}_k\cdot\bar{i}_i = c_{ki}$, $\bar{i}_k\cdot\bar{j}_i = -s_{ki}$ получим формулу (15).

Умножим вектор (4) скалярно на орт $\bar{j}_k$. С учётом равенств $\bar{j}_k\cdot\bar{k} = 0$, $\bar{j}_k\cdot I_k\cdot\bar{k} = -I_k^{yz}$, $\bar{j}_k\cdot\bar{k}\times I_k\cdot\bar{k} = \bar{i}_k\cdot I_k\cdot\bar{k} = -I_k^{xz}$, $\bar{j}_k\cdot\bar{i}_k\times\bar{g} = -\bar{k}\cdot\bar{g}$, $\bar{j}_k\cdot\bar{i}_i = s_{ki}$, $\bar{j}_k\cdot\bar{j}_i = c_{ki}$ получим формулу (16).

Умножим вектор (4) скалярно на орт $\bar{k}$. С учётом равенств $\bar{k}\cdot\bar{k} = 1$, $\bar{k}\cdot I_k\cdot\bar{k} = I_k^z$, $\bar{k}\cdot\bar{k}\times I_k\cdot\bar{k} = 0$, $\bar{k}\cdot\bar{i}_k\times\bar{g} = \bar{j}_k\cdot\bar{g}$, $\bar{k}\cdot\bar{i}_i = \bar{k}\cdot\bar{j}_i = 0$ получим искомое выражение (17).

Пусть a_k, b_k, h_k – проекции радиус-вектора $\overline{C_{dk}C_k}$ на орты $\bar{i}_k, \bar{j}_k, \bar{k}$. Тогда

$$\bar{r}_k = \overline{O_{0k}C_k} = \overline{O_{0k}C_{dk}} + \overline{C_{dk}C_k} = x_{dk}\bar{i}_k + a_k\bar{i}_k + b_k\bar{j}_k + h_k\bar{k} = x_{ak}\bar{i}_k + b_k\bar{j}_k + h_k\bar{k},$$

где $x_{ak} = x_{dk} + a_k$. Следовательно, $r_k^2 = x_{ak}^2 + b_k^2 + h_k^2$, $R_j^2 = (R_j^x)^2 + (R_j^y)^2 + (R_j^z)^2$ и по правилу диадного произведения 2-х трёхмерных векторов [8] получим

$$\bar{r}_k\bar{r}_k = \begin{pmatrix} x_{ak}^2 & x_{ak}b_k & x_{ak}h_k \\ b_k x_{ak} & b_k^2 & b_k h_k \\ h_k x_{ak} & h_k b_k & h_k^2 \end{pmatrix}, \quad \bar{R}_j\bar{R}_j = \begin{pmatrix} R_j^{x2} & R_j^x R_j^y & R_j^x R_j^z \\ R_j^y R_j^x & R_j^{y2} & R_j^y R_j^z \\ R_j^z R_j^x & R_j^z R_j^y & R_j^{z2} \end{pmatrix}.$$

Подставляя всё это в (9), получим

$$I_k = I_{ck} + m_{0k}\begin{pmatrix} b_k^2 + h_k^2 & -x_{ak}b_k & -x_{ak}h_k \\ -b_k x_{ak} & x_{ak}^2 + h_k^2 & -b_k h_k \\ -h_k x_{ak} & -h_k b_k & x_{ak}^2 + b_k^2 \end{pmatrix} + \sum_{j,k} m_j\begin{pmatrix} R_j^{y2} + R_j^{z2} & -R_j^x R_j^y & -R_j^x R_j^z \\ -R_j^y R_j^x & R_j^{x2} + R_j^{z2} & -R_j^y R_j^z \\ -R_j^z R_j^x & -R_j^z R_j^y & R_j^{x2} + R_j^{y2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $-I_k^{xz} = -I_{ck}^{xz} - m_{0k}h_k x_{ak} - \sum_{j,k} m_j R_j^x R_j^z$, $-I_k^{yz} = -I_{ck}^{yz} - m_{0k}h_k b_k - \sum_{j,k} m_j R_j^z R_j^y$, $I_k^z = I_{ck}^z + m_{0k}\left(x_{ak}^2 + b_k^2\right) + \sum_{j,k} m_j\left(R_j^x R_j^x + R_j^y R_j^y\right)$. Отсюда получим искомые формулы (18)–(20). *Утверждение доказано.*

3. Частные формулы вычисления проекций инерционных сил. Для шарнирного механизма (ШМ) $x_{di} = d_i$, $\bar{V}_{ri} = 0$, $\bar{W}_{ri} = 0$. Поэтому из (12)–(20) получим

Следствие 1. Проекции векторов $\bar{F}_{qk}$, $\bar{M}_{qk}$ на оси СК k-го звена ШМ вычисляются по формулам

$$F_{qk}^x = m_k\sum_{i}^{k-1} R_{i+1}^{xy}\left(s_{xik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i - s_{yik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_{dk}\dot{\alpha}_k^2 - \sum_{i>k} m_{di}\left(s_{ki}\ddot{\alpha}_i + c_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_k\bar{i}_k\cdot\bar{g}, \tag{21}$$

$$F_{qk}^y = m_k \sum_i^{k-1} R_{i+1}^{xy}\left(s_{yik}^{\prime i+1}\ddot{\alpha}_i + s_{xik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + m_{dk}\ddot{\alpha}_k + \sum_{i>k} m_{di}\left(c_{ki}\ddot{\alpha}_i - s_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_k \bar{j}_k \cdot \bar{g}, \quad (22)$$

$$F_{qk}^z = -m_k \bar{k} \cdot \bar{g}, \quad (23)$$

$$M_{qk}^x = -I_k^{xz}\ddot{\alpha}_k + I_k^{yz}\dot{\alpha}_k^2 - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i \ge j} m_{di}\left(c_{ki}\ddot{\alpha}_i - s_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right), \quad (24)$$

$$M_{qk}^y = -I_k^{yz}\ddot{\alpha}_k - I_k^{xz}\dot{\alpha}_k^2 - \sum_{j,k} R_j^z \sum_{i \ge j} m_{di}\left(s_{ki}\ddot{\alpha}_i + c_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right) + m_k x_{dk}\bar{k} \cdot \bar{g}, \quad (25)$$

$$M_{qk}^z = m_{dk} \sum_i^{k-1} R_{i+1}^{xy}\left(s_{yik}^{i+1}\ddot{\alpha}_i + s_{xik}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + I_k^z\ddot{\alpha}_k + \sum_{j,k} R_j^{xy} \sum_{i \ge j} m_{di}\left(s_{yki}^j\ddot{\alpha}_i - s_{xki}^j\dot{\alpha}_i^2\right) - m_{dk}\bar{j}_k \cdot \bar{g}, \quad (26)$$

где $m_{di} = m_i d_i$.

Замечание 2. Если для всех j звено m_{0j-1} имеет только одно смежное звено m_{0j} и центр масс C_{dj-1} лежит на оси $O_{0j-1}O_{0j}$, то $\bar{R}_j = O_{0j-1}O_{0j}\bar{i}_{j-1}$ и $R_j^y = R_j^z = 0$, $R_j^x = R_j^{xy} = R_j > 0$. Следовательно,

$$s_{xik}^j = \sin[\alpha_{ik} + \arccos(R_j / R_j)] = \sin(\alpha_{ik}) = s_{ik},$$

$$s_{yik}^j = \sin[\alpha_{ik} + \arccos(0 / R_j)] = \sin(\alpha_{ik} + \pi/2) = \cos(\alpha_{ik}) = c_{ik}.$$

Учитывая замечание 2 и равенства $s_{kk} = 0$, $c_{kk} = 1$ из утверждения 2, получим

Следствие 2. Для ПРМ, все звенья которого удовлетворяют замечанию 2, проекции векторов $\bar{F}_{qk}$, $\bar{M}_{qk}$ на оси $O_{ok}\bar{i}_k$, $O_{ok}\bar{j}_k$, $O_{ok}\bar{k}$ СК k-го звена вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} F_{qk}^x = {} & m_k \sum_{i=1}^{k-1}\left[c_{ik}\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + s_{ik}\left(R_{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] + m_k\left(\ddot{x}_k - x_{dk}\dot{\alpha}_k^2\right) + \\ & + \sum_{i=k+1}^{N} m_i\left[c_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) - s_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_k\bar{i}_k \cdot \bar{g}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$F_{qk}^y = F_{ak}^y + m_k\left(x_{dk}\ddot{\alpha}_k + 2\dot{x}_k\dot{\alpha}_k\right) + F_{bk}^y, \quad (28)$$

$$F_{qk}^z = -m_k\bar{k} \cdot \bar{g}, \quad M_{qk}^x = -I_{ck}^{xz}\ddot{\alpha}_k + I_{ck}^{yz}\dot{\alpha}_k^2, \quad M_{qk}^y = -I_{ck}^{yz}\ddot{\alpha}_k - I_{ck}^{xz}\dot{\alpha}_k^2 + m_k x_{dk}\bar{k} \cdot \bar{g}, \quad (29)$$

$$M_{qk}^z = x_{dk}F_{ak}^y + I_k^z\ddot{\alpha}_k + 2m_k x_{dk}\dot{x}_k\dot{\alpha}_k + R_{k+1}F_{bk}^y, \quad (30)$$

где
$$F_{ak}^y = m_k \sum_{i=1}^{k-1}\left[-s_{ik}\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{ik}\left(R_{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_k\bar{j}_k \cdot \bar{g}, \quad (31)$$

$$F_{bk}^y = \sum_{i=k+1}^{N} m_i\left[s_{ki}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{ki}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right]. \quad (32)$$

Отсюда получим

Следствие 3. Для ШМ, все звенья которого удовлетворяют замечанию 2, проекции векторов $\bar{F}_{qk}$, $\bar{M}_{qk}$ на оси $O_{ok}\bar{i}_k$, $O_{ok}\bar{j}_k$, $O_{ok}\bar{k}$ СК k-го звена вычисляются по формулам

$$F_{qk}^x = m_k \sum_{i=1}^{k-1} R_{i+1}\left(s_{ik}\ddot{\alpha}_i - c_{ik}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_{dk}\dot{\alpha}_k^2 - \sum_{i=k+1}^{N} m_{di}\left(s_{ki}\ddot{\alpha}_i + c_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_k\bar{i}_k \cdot \bar{g}, \quad (33)$$

$$F_{qk}^z = -m_k\bar{k} \cdot \bar{g}, \quad M_{qk}^x = -I_{ck}^{xz}\ddot{\alpha}_k + I_{ck}^{yz}\dot{\alpha}_k^2, \quad M_{qk}^y = -I_{ck}^{yz}\ddot{\alpha}_k - I_{ck}^{xz}\dot{\alpha}_k^2 + m_{dk}\bar{k} \cdot \bar{g}, \quad (34)$$

$$F_{qk}^y = F_{ak}^y + m_{dk}\ddot{\alpha}_k + F_{bk}^y, \quad M_{qk}^z = d_k F_{ak}^y + I_k^z\ddot{\alpha}_k + R_{k+1}F_{bk}^y, \quad (35)$$

где
$$F_{ak}^y = m_k \sum_{i=1}^{k-1} R_{i+1}\left(c_{ik}\ddot{\alpha}_i + s_{ik}\dot{\alpha}_i^2\right) - m_k\bar{j}_k \cdot \bar{g}, \quad F_{bk}^y = \sum_{i=k+1}^{N} m_{di}\left(c_{ki}\ddot{\alpha}_i - s_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right). \quad (36)$$

Замечание 3. В монографии [8] предложен общий формализм вывода формул для вычисления динамических реакций в ШМ. Он требует выполнения громоздких аналитических вычислений. Формулы (33)—(36) позволяют выписывать выражения динамических реакций без выполнения аналитических операций.

Из следствия 3 с учётом формулы (2) получим

Следствие 4. Уравнения динамики (УД) ШМ, все звенья которого удовлетворяют замечанию 2, имеют вид

$$m_{dk}\sum_{i=1}^{k-1}L_i\left(c_{ik}\ddot{\alpha}_i+s_{ik}\dot{\alpha}_i^2\right)+I_k^z\ddot{\alpha}_k+L_k\sum_{i=k+1}^{N}m_{di}\left(c_{ki}\ddot{\alpha}_i-s_{ki}\dot{\alpha}_i^2\right)-m_{dk}\bar{j}_k\cdot\bar{g}=M_k-M_{k+1}, \tag{37}$$

где k=1, 2,..., N; $L_i=O_iO_{i+1}=R_{i+1}$ – длина i-го звена.

Замечание 4. УД (37) совпадают с УД n-звенника, полученных другим путём в следствии 7 статьи [3].

Замечание 5. В механике используются несколько подходов для вычисления динамических реакций. В наиболее распространённом способе силового расчёта [4–7] используется метод кинетостатики. В предлагаемом формализме все расчёты основаны на формулах (1)–(4). Если берутся проекции искомых векторов на оси СК звеньев, то в расчётах используются формулы утверждения 2. Для ШМ они принимают более простой вид (21)–(26). Для ПРМ и ШМ, соответствующих замечанию 2, расчётные формулы принимают наиболее простой вид (27)–(36).

Замечание 6. В другом известном подходе [8] наложенную на МС связь заменяют силой, эквивалентной по своему действию этой связи, что позволяет рассматривать МС как освобождённую от связи. При этом появляется новое возможное перемещение, которому соответствует изменение новой обобщённой координаты (ОК), сохраняющей постоянное значение в действительном движении. Если исходная МС имеет n ОК, то освобождённая будет иметь n+1 ОК. Вычислив для такой МС Лагранжиан, записав уравнение Лагранжа 2-го рода для новой ОК и приравняв нулю её обобщённые скорости и ускорения, получают уравнение для определения интересующей реакции. По такому формализму в [8] вычисляются динамические реакции в КП ШМ. В этом формализме не возникает вопросов с условиями статической определимости.

4. Общий вид УД ПРМ. Для исключения ускорений из формул вычисления искомых реакций можно использовать

Утверждение 4. Если k-е звено ПРМ образует со своей базой ПКП, то его УД имеет вид

$$F_{qk}^x=F_k+\bar{i}_k\cdot\sum_{i\ge k}\left(\bar{F}_{ri}+\bar{F}_{bi}\right). \tag{38}$$

Если k-е звено образует со своей базой ВКП, то его УД имеет вид

$$M_{qk}^z=M_k-\sum_{j:k}M_j-\sum_{j;k}M_j^r+\bar{k}\cdot\left(\bar{M}_{rk}+\bar{M}_{bk}\right)+\bar{k}\cdot\sum_{j,k}\bar{R}_j\times\sum_{i\ge j}\left(\bar{F}_{ri}+\bar{F}_{bi}\right), \tag{39}$$

где

$$\begin{gathered}M_j^r=m_jx_j\sum_{i}^{j-1}\left(-s_{ij}\ddot{x}_i+R_{i+1}^{xy}s_{yij}^{i+1}\ddot{\alpha}_i+2c_{ij}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i+R_{i+1}^{xy}s_{xij}^{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right)+x_jm_j\left(x_{dj}\ddot{\alpha}_j+2\dot{x}_j\dot{\alpha}_j\right)+\\+x_j\sum_{i>j}m_i\left[s_{ji}\left(\ddot{x}_i-x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)+c_{ji}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i+2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right]-m_jx_j\bar{j}_j\cdot\bar{g}-x_j\bar{j}_j\cdot\sum_{i\ge j}\left(\bar{F}_{ri}+\bar{F}_{bi}\right),\end{gathered} \tag{40}$$

$\sum_{j:k}M_j$ – знак суммирования величины M_j по номерам звеньев, смежных k-му звену и образующих с ним ВКП; $\sum_{j;k}M_j^r$ – знак суммирования величины M_j по номерам звеньев, смежных k-му звену и образующих с ним ПКП. Величины F_{qk}^x, M_{qk}^z вычисляются по формулам (12), (17).

Доказательство. Разобьём сумму $\sum_{j,k}M_j$ на две части. Получим $\sum_{j,k}M_j=\sum_{j:k}M_j+\sum_{j;k}M_j^r$. Если j-е звено образует с k-м звеном ПКП, то момент силы $\bar{F}_j$ относительно точки O_{0j} вычисляется по формуле $M_j^r=\bar{k}\cdot\overline{O_{0j}C}_{dj}\times\bar{F}_j=x_j\bar{j}_j\cdot\left[\bar{F}_{qj}-\sum_{i\ge j}\left(\bar{F}_{ri}+\bar{F}_{bi}\right)\right]$. Подставим сюда вместо $\bar{F}_{qj}$ выражение (3). Тогда получим

$$M_j^r=x_j\bar{j}_j\cdot\left\{m_j\sum_{i}^{j-1}\left[\left(\ddot{x}_i-R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i-R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{i}_i+\left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i+2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i-R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{j}_i\right]+\right.$$

$$+\sum_{i\geq j} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)\bar{i}_i + \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\bar{j}_i\right] - m_j\bar{g} - \sum_{i\geq j}\left(\bar{F}_{ri} + \bar{F}_{bi}\right)\Bigg\}.$$

Если $i<j$, то $\bar{i}_i \cdot \bar{j}_j = \cos(\alpha_{ij} + \pi/2) = -s_{ij}$, $\bar{j}_i \cdot \bar{j}_j = c_{ij}$. Если $i \geq j$, то $\bar{j}_j \cdot \bar{i}_i = \cos(\alpha_{ji} - \pi/2) = s_{ji}$, $\bar{j}_j \cdot \bar{j}_i = c_{ji}$. Следовательно,

$$M_j^r = m_j x_j \sum_{i}^{j-1}\left[-\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}^y\ddot{\alpha}_i - R_{i+1}^x\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ij} + \left(R_{i+1}^x\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i - R_{i+1}^y\dot{\alpha}_i^2\right)c_{ij}\right] +$$
$$+ x_j\sum_{i\geq j} m_i\left[\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right)s_{ji} + \left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)c_{ji}\right] - m_j x_j\bar{j}_j \cdot \bar{g} - x_j\bar{j}_j \cdot \sum_{i\geq j}\left(\bar{F}_{ri} + \bar{F}_{bi}\right).$$

После приведения подобных в 1-й сумме получим следующий вид выражения в квадратных скобках: $-s_{ij}\ddot{x}_i + \left(R_{i+1}^x c_{ij} + R_{i+1}^y s_{ij}\right)\ddot{\alpha}_i + 2c_{ij}\dot{x}_i\dot{\alpha}_i + \left(R_{i+1}^x s_{ij} - R_{i+1}^y c_{ij}\right)\dot{\alpha}_i^2$. Теперь, используя обозначения $R_j^x s_{kl} - R_j^y c_{kl} = R_j^{xy} s_{xkl}^J$, $R_j^x c_{kl} + R_j^y s_{kl} = R_j^{xy} s_{ykl}^J$, получим искомое выражение (40). *Утверждение доказано.*

Из утверждения 4 с учётом следствия 2 получим

Следствие 5. Пусть все звенья ПРМ удовлетворяют замечанию 2. Тогда, если k-е звено образует со своей базой ПКП, то его УД имеет вид

$$F_{qk}^x = F_k + \bar{i}_k \cdot \sum_{i=k}^{N}\left(\bar{F}_{ri} + \bar{F}_{bi}\right), \tag{41}$$

и если k-е звено образует со своей базой ВКП, то его УД имеет вид

$$M_{qk}^z = M_k - M_{k+1}^o + \bar{k}\cdot\left(\bar{M}_{rk} + \bar{M}_{bk}\right) + \bar{k}\cdot\bar{R}_{k+1} \times \sum_{i=k+1}^{N}\left(\bar{F}_{ri} + \bar{F}_{bi}\right), \tag{42}$$

где величины F_{qk}^x, M_{qk}^z вычисляются по формулам (27), (30). Если $(k+1)$-е звено образует с k-м звеном ВКП, то $M_{k+1}^o = M_{k+1}$. Если $(k+1)$-е звено образует с k-м звеном ПКП, то

$$M_{k+1}^o = m_{k+1}x_{k+1}\sum_{i=1}^{k}\left[-s_{ik+1}\left(\ddot{x}_i - R_{i+1}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{ik+1}\left(R_{i+1}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - m_{k+1}x_{k+1}\bar{j}_{k+1}\cdot\bar{g} +$$
$$+ x_{k+1}\sum_{i=k+1}^{N} m_i\left[s_{k+1,i}\left(\ddot{x}_i - x_{di}\dot{\alpha}_i^2\right) + c_{k+1,i}\left(x_{di}\ddot{\alpha}_i + 2\dot{x}_i\dot{\alpha}_i\right)\right] - x_{k+1}\bar{j}_{k+1}\cdot\sum_{i=k+1}^{N}\left(\bar{F}_{ri} + \bar{F}_{bi}\right). \tag{43}$$

Заключение. Доказанные утверждения и следствия содержат новые эффективные алгоритмы для вывода формул вычисления динамических реакций и обобщённых движущих сил ГЕРМ.

Литература

1. Телегин, А.И. Алгоритмы решения первой задачи динамики произвольных систем тел / А.И. Телегин, А.В. Абросов // Вестник ЮУрГУ, Серия «Машиностроение». - 2001. - Вып. 1. - № 6(06). - С. 3-9.

2. Телегин, А.И. Новые уравнения для решения задач динамики и синтеза систем твёрдых тел/А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». -2006. -Вып. 8. -№11(66). - С. 3-14.

3. Телегин, А.И. Общий и частные виды уравнений динамики систем абсолютно твёрдых тел/ А.И. Телегин // Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». -2007. -Вып. 9. -№ 11(83). - С. 3-13.

4. Механика машин: учебное пособие для втузов / И.И. Вулъфсон, М.Л. Ерихое, М.З. Коловский и др.; под ред. Г.А. Смирнова. -М.: Высш. шк., 1996-511 с.

5. Левитская, О.И. Курс теории механизмов и машин: учебное пособие для мех. спец. вузов / О.Н. Левитская, Н.И. Левитскш. - 2-е изд., перераб. и доп. -М.: Высш. шк., 1985. -279 с.

6. Озол, ОТ. Теория механизмов и машин / ОТ. Озол; под ред. С.Н. Кожевникова. - М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. - 432 с.

7. Теория механизмов и машин: учебник для втузов /КВ. Фролов, С. А. Попов, А.К. Мусатов и др.; подред КВ. Фролова. -М.: Высш. шк., 1987.- 496 с.

8. Лурье, А.И. Аналитическая механика /А.И. Лурье. -М.: Физматгиз, 1961. - 824 с.