УДК 519.248:[33+301+159.9]

МЕТОДЫ СЕТОЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ СОБЫТИЙ

О.Ю. Воробьев, О.Ю. Тарасова, А.Н. Овсянникова

Представлен вновь введенный метод сеточной аппроксимации неизвестного распределения множества случайных событий.

Введение

Ввиду большого числа событий в реальных статистических системах, возникает трудность определения состояний, в которых может оказаться система. Один из способов преодоления трудностей подобного рода заключается в отыскании сеточного распределения состояния системы, определенного на введенной сетке и близкого к искомому неизвестному распределению. Матричные модели маркетинга [1] натолкнули на идею методов аппроксимации распределений, аналогичных сеточным методам решения дифференциальных уравнений.

Постановка задачи

Существо сеточного метода состоит в следующем: вместо исходного пространства элементарных событий вводится его сеточный аналог. Эта сеточная модель описывается вероятностями, которые определены только на событиях сетки. Неизвестные распределения, т.е. законы, в соответствии с которыми эволюционирует пространство элементарных событий, заменяется соответствующими сеточными аналогами. В итоге исходная задача заменяется, или, как говорят, аппроксимируется системой сеточных распределений - *сеточной схемой.* Другими словами, на аппроксимируемое множество событий «набрасывается сетка» с целью попытаться представить, как ведут себя «неизвестные» события из аппроксимируемого множества в пределах «известных ячеек», роль которых будет предоставлено исполнять событиям-терраскам, образующим сетку.

Основные понятия эвентологии и теории вероятностей

Эвентология - новое направление, возникшее в рамках теории вероятностей и изучающее распределение множеств событий, структуры зависимостей множеств событий [2].

Определение 1.1. *Вероятностным пространством* называется тройка $(\Omega, F, \mathbf{P})$, где Ω – пространство элементарных событий, F - алгебра событий и P - вероятность, определенная на элементах алгебры F - случайных событиях $x, y, \ldots \in F$.

Определение 1.2. Конечное множество избранных событий $\boldsymbol{X} \in F$, выбранных из алгебры вероятностного пространства $(\Omega, F, \mathbf{P})$ и состоящее из $N = |\boldsymbol{X}|$ событий, называется *множеством случайных событий.*

Определение 1.3. Множество случайных событий X порождает различные наборы так называемых *событий-террасок,* среди которых есть события-терраски для $X \subseteq \boldsymbol{X}$ в форме пересечения: $\mathrm{ter}(X) = \bigcap\limits_{x \in X} x \bigcap\limits_{x \in X^c} x^c$.

Определение 1.4. Два случайных события $x, y \in \boldsymbol{X}\ (x \neq \emptyset, y \neq \emptyset)$ называются *вложенными,* если между ними возможны только два отношения

$$x \cap y = \begin{cases} x, \\ y, \end{cases}$$

то есть одно из этих событий вложено в другое: $x \subseteq y$ или $y \subseteq x$.

Сетка событий, или эвентологическая сетка (Э-сетка)

Начальным этапом построения *сеточной схемы* является замена исходного пространства элементарных событий некоторой сеткой событий, образующих его разбиение.

Определение 2.1. *Эвентологическая сетка* (Э-сетка) - это множество $S \subset F$ непересекающихся случайных событий, выбранных из алгебры F вероятностного пространства $(\Omega, F, \mathbf{P})$ и образующих разбиение пространства элементарных событий Ω.

Э-сетка S (сеточное множество случайных событий S, сеточное эвентологическое распределение множества S) определена тогда и только тогда, когда:

1) выбрано множество $S \subset F$ непересекающихся случайных событий, образующих разбиение $\Omega = \sum_{s \in S} s$;
2) задан набор вероятностей $q(s) = \mathbf{P}(s), \quad s \in S$.

Для «одномерной» задачи простейшим примером Э-сетки является равновероятное разбиение пространства элементарных событий на N равновероятных событий, вероятность которых равна $1/N$ *(равновероятная Э-сетка)*. Равновероятные события Э-сетки называются *Э-террасками сетки (Э-узлами сетки)*, а их вероятности называют также *Э-шагами сетки*. Совокупность Э-террасок образует множество событий, где определены Э-сеточные распределения.

Определение 2.2. *Эвентологической сеткой n-го порядка* S^n пространства элементарных событий Q называется пересечение по Минковскому разбиений $A^1, \dots, A^n \subseteq F$:

$$S^n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} A^i \right) = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} a^i : a^i \in A^i, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Элементы Э-сетки - события-терраски вида

$$\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} = \bigcap_{i=1}^{n} a^i \subseteq \Omega$$

- называются *Э-ячейками* Э-сетки S^n.

Ясно, что

$$\Omega = \sum_{a^1 \in A^1} \dots \sum_{a^n \in A^n} \mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} = \sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} \in S^n} \mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}$$

- Э-ячейки образуют разбиение пространства элементарных событий Ω.

Таким образом, Э-сетка имеет вид:

$$S^n = \left\{ \mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}, \quad a^i \in A^i, \quad i = 1, \dots, n \right\}.$$

Несмотря на кажущуюся простоту, вопрос о выборе Э-сетки заслуживает внимания. С одной стороны, количество событий-террасок желательно брать большим, т.е. пользоваться мелкими, подробными Э-сетками. Точнее передавая при этом область изменения Э-аргумента, мы интуитивно рассчитываем лучше аппроксимировать искомое Э-распределение сеточными распределениями. С другой стороны, практические соображения, и в первую очередь ограниченность быстродействия и объема памяти компьютеров, заставляет обращаться к Э-сеткам со сравнительно небольшим числом Э-террасок. Решением этой проблемы часто служат *неравновероятные* Э-сетки. Если имеется информация об Э-распределении, например, известно «расположение» в пространстве элементарных событий некоторых его особенностей, для «разрешения» которых необходима мелкая Э-сетка, то можно, не увеличивая общего числа террасок, сгустить сетку в «окрестности» этих особенностей, а в «гладкой» области распределения сетку сделать редкой.

Определение 2.3.. X - *аппроксимирующим* S^n *-сеточным отображением* называется отображение $\varphi : S^n \to 2^X$, которое на Э-ячейке

$$\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} = \bigcap_{i=1}^{n} a^i \in S^n$$

принимает значение

$$\varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}) = \{ x \in \boldsymbol{X} : \quad x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} \neq \emptyset \},$$

которое сокращенно обозначается

$$\varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}) = X_{a^1 \dots a^n} \in 2^X.$$

Определение 2.4. 5"" - *аппроксимацией множества событий* X называется множество событий

$$X^{\varphi} = \{x^{\varphi} : x \in X\},$$

где каждое событие

$$x^{\varphi} = \sum_{x \in \varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right)} \left(x \cap \mathrm{ter}_{a^1 \ldots a^n}\right) \tag{1}$$

называется S^n *-аппроксимацией события* $x \in X$.

Событие-терраску будем обозначать

$$\mathrm{ter}^{\varphi}(X) = \bigcap_{x \in X} x^{\varphi} \bigcap_{x \in X^c} (x^{\varphi})^c, \quad X \subseteq X. \tag{2}$$

Приведем примеры X-аппроксимирующего S^2 отображения с различной степенью ошибки:

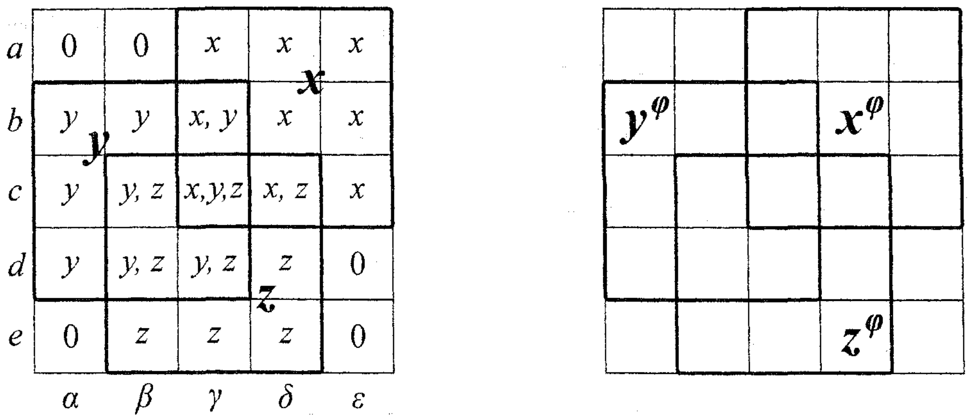


Рис. 1. Эвентологическая сетка второго порядка $S^2 = \{a,b,c,d,e\}(\cap)\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение триплета событий $X = \{x,y,z\}$ с нулевой ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $X^{\varphi} = \{x^{\varphi}, y^{\varphi}, z^{\varphi}\}$ на Э-ячейках (справа)

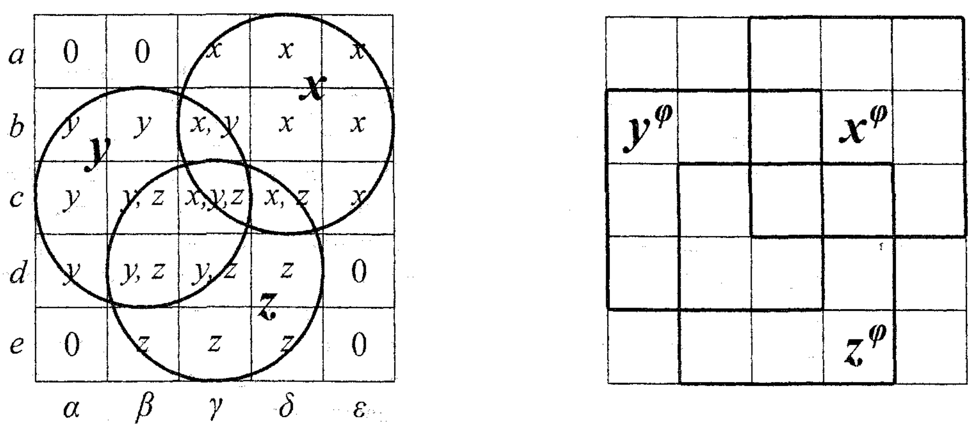
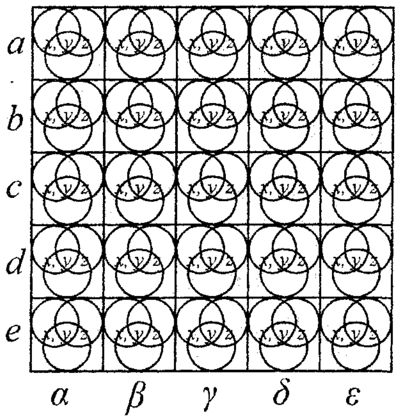


Рис. 2. Эвентологическая сетка второго порядка $S^2 = \{a,b,c,d,e\}(\cap)\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение триплета событий $X = \{x,y,z\}$ с некоторой ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $X^{\varphi} = \{x^{\varphi}, y^{\varphi}, z^{\varphi}\}$ на Э-ячейках (справа)

Виды Э-сеточной аппроксимации

Точность Э-сеточной аппроксимации Э-распределений определяется *структурой локальной зависимости* аппроксимируемого множества событий, которая характеризуется отношением структур зависимостейдвух множеств событий, участвующих в Э-сеточной аппроксимации: Э-сетки S^n и аппроксимируемого множества X.

Рассмотрим три вида Э-сеточной аппроксимации, каждый из которых справедлив в рамках одного из трех предположений о локальной структуре зависимости аппроксимируемого множества событий X: *вложенной, независимой и наименее пересекающейся.*



	x	$=$	Ω	
	y	$=$	Ω	
	z	$=$	Ω	

Рис. 3. Эвентологическая сетка второго порядка $S^2 = \{a,b,c,d,e\}(\cap)\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, аппроксимирующая исходное Э-распределение триплета событий $X = \{x,y,z\}$ с наибольшей ошибкой (слева). Э-сеточная аппроксимация $X^{\varphi} = \{\Omega,\Omega,\Omega\}$ на Э-ячейках (справа)

Определение 3.1. Множество событий X имеет *локально вложенную структуру относительно Э-сетки* S^n, если для любой Э-ячейки $\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} = \bigcap_{i=1}^{n} a^i \in S^n$ и любого события $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$:

$$x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} = \begin{cases} \emptyset, \\ \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}, \end{cases}$$

т.е. либо $\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$ содержится в x, либо не пересекается с ним.

Из этого определения следуют два свойства:

1) $\bigcup\limits_{x \in X_{a^1 \ldots a^n}} \left(x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}\right) = \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$,

2) события $x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$, где $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$, равновероятны.

Определение 3.2. Множество событий X имеет *локально наименее пересекающуюся структуру относительно Э-сетки* S^n, если для любой Э-ячейки $\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} \in S^n$ и любого множества событий $X_{a^1 \ldots a^n} \subseteq X$:

1) $\sum\limits_{x \in X_{a^1 \ldots a^n}} \left(x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}\right) = \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$,

2) события $x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$, где $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$, равновероятны.

Определение 3.3. Множество событий X имеет *локально независимую структуру относительно Э-сетки* S^n, если для любой Э-ячейки $\mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}} \in S^n$ и любого множества событий $X_{a^1 \ldots a^n} \subseteq X$:

1) $\bigcup\limits_{x \in X_{a^1 \ldots a^n}} \left(x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}\right) = \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$,

2) события $x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$, где $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$, равновероятны,

3) события $x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \ldots a^n\}}$, где $x \in X_{a^1 \ldots a^n}$, независимы в совокупности.

Теорема 3.1. Эвентологическое распределение S^n-аппроксимации множества событий X

$$p^{\varphi}(X) = \mathbf{P}(\mathrm{ter}^{\varphi}(X)), \quad X \subseteq X$$

принимает один из следующих видов:

1) для локально вложенной структуры множества событий $\mathcal{X}$:
$$p^{\varphi}(X)=\sum_{X\subseteq\varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})}\mathbf{P}(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}),\quad X\subseteq\mathbf{X};$$

2) для локально наименее пересекающейся структуры множества событий $\mathcal{X}$:
$$p^{\varphi}(X)=\sum_{X\subseteq\varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})}\frac{1}{\left|X_{a^1\dots a^n}\right|}\mathbf{P}(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}),\quad X\subseteq\mathbf{X};$$

3) для локально независимой структуры множества событий $\mathcal{X}$:
$$p^{\varphi}(X)=\sum_{X\subseteq\varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})}\left(\mathbf{P}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\right)^{|X|}\left(\mathbf{P}(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})-\mathbf{P}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\right)^{|X^c|},\quad X\subseteq\mathbf{X},$$

где $\left(\mathbf{P}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\right)=1-\left(1-\mathbf{P}(\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\right)^{1/n}$.

Доказательство. Очевидно, что
$$p^{\varphi}(X)=\mathbf{P}\left(\sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\in S^n}\left(\mathrm{ter}^{\varphi}(X)\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)\right)=\sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\in S^n}\mathbf{P}\left(\mathrm{ter}^{\varphi}(X)\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right).\tag{3}$$

Подставляя (1) в (2), получаем
$$\mathrm{ter}^{\varphi}(X)=\bigcap_{x\in X}x^{\varphi}\bigcap_{x\in X^c}(x^{\varphi})^c=$$
$$=\bigcap_{x\in X}\left(\sum_{x\in\varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)}\left(x\cap\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)\right)\bigcap_{x\in X^c}\left(\sum_{x\in\varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)}\left(x\cap\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)\right)^c=$$
$$=\bigcap_{x\in X}\left(\sum_{x\in\varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)}\left(x\cap\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)\right)\bigcap_{x\in X^c}\left(\sum_{x\in\varphi\left(\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)}\left(x^c\cap\mathrm{ter}_{a^1\dots a^n}\right)\right).$$

Используя полученное выражение для $\mathrm{ter}^{\varphi}(X)$, получаем
$$\mathrm{ter}^{\varphi}(X)\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}=\bigcap_{x\in X}\left(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)\bigcap_{x\in X^c}\left(x^c\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)$$

или в других обозначениях
$$\mathrm{ter}^{\varphi}(X)\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}=\bigcap_{x\in X}\left(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)\bigcap_{x\in X^c}\left(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)^{c'},$$

где $x^{c'}=\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\setminus\left(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)$ – дополнение x до $\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\in S^n$, а $x^c=\Omega\setminus\left(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)$ – дополнение x до Ω.

Таким образом, выражение под знаком суммы в (3) можно записать в виде
$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\bigcap_{x\in X^c}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})^{c'}\right),$$

а саму формулу (3)
$$p^{\varphi}(X)=\sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\in S^n}\mathbf{P}\left(\mathrm{ter}^{\varphi}(X)\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\right)=$$
$$=\sum_{\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}}\in S^n}\mathbf{P}\left(\bigcap_{x\in X}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})\bigcap_{x\in X^c}(x\cap\mathrm{ter}_{\{a^1\dots a^n\}})^{c'}\right),\quad X\subseteq\mathbf{X}\tag{4}$$

Формула (4) - эвентологическое распределение S^n-аппроксимации множества событий X, имеющего произвольную локальную структуру. Используя формулу (4), можно записать формулы для эвентологического распределения S^n-аппроксимации множества событий X, имеющего локально вложенную, локально наименее пресекающуюся и локально независимую структуру.

Например, рассмотрим множество X, имеющего локально наименее пересекающуюся структуру. По определению локально наименее пересекающейся структуры, события $x \cap \mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}$, где $x \in \varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}})$ не пересекаются и имеют одинаковую вероятность. Поэтому эвентологическое распределение S^n-аппроксимации множества событий X с локально наименее пересекающейся структурой можно записать в виде:

$$p^{\varphi}(X) = \sum_{X \subseteq \varphi(\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}})} \frac{1}{\left|X_{a^1 \dots a^n}\right|} \mathbf{P}(\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}}), \quad X \subseteq \boldsymbol{X},$$

где суммирование ведется по всем $\mathrm{ter}_{\{a^1 \dots a^n\}} \in S^n$, содержащим $X \subseteq \boldsymbol{X}$.

Применение полученных результатов

В качестве аппроксимируемого множества X рассмотрим множество стратегий, предлагаемых компанией Артур Д. Литтл [1]. Распределение множества стратегий неизвестно, поэтому будем использовать метод сеточной аппроксимации для нахождения этого распределения.

В классическом изложении маркетинговой модели ADL/LC принцип построения матрицы ADL подсказывает вид эвентологической сетки. Пересечение двух множеств событий - четырех событий жизненного цикла отрасли и пяти событий его конкурентного положения образуют эвентологическую сетку второго порядка $S^2 = \{a, b, c, d\}(\cup)\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Каждой ячейке сетки соответствует набор стратегий из множества базовых стратегий, предлагаемых специалистами ADL в качестве руководства к действию. Сделав предположения о локальной структуре зависимости аппроксимируемого множества стратегий X (например, на основе анализа этих стратегий специалистами маркетинга), получим эвентологическое распределение S^2-аппроксимации множества событий X.

Заключение

В работе получены следующие результаты:

1. Определены понятия эвентологической теории сеточных методов: Э-сетки, X-аппроксимирующего S^n сеточного отображения, S^n-аппроксимации множества событий.
2. Определены три вида локальных структур зависимости.
3. Сформулирована и доказана теорема об эвентологическом распределении S^n-аппроксимации множества событий X для различных локальных структур зависимости этого множества.

Литература

1. Ефремов, В.С. Классические модели стратегического анализа и планирования: модель ADL/LC / В.С. Ефремов // Менеджмент в России и за рубежом. М.: Финпресс. - 1998. - № 1 (http://www.cfin.ru/press/managment/1998-1/09.shtml).

2. Воробьев, О.Ю. Введение в эвентологию / О.Ю. Воробьев - Красноярск: КрасГУ, ИВМ СО РАН, 2005.-512 с.

3. http://www.r-events.narod.ru

Поступила «редакцию 2 апреля 2007г.