

Е.Ю. Алексеева

Рассматриваются дискретные случайные процессы, содержащие параметры, меняющиеся скачкообразно в случайные моменты времени. Для прогнозирования процессов строится фильтр в предположении постоянства параметров. Момент изменения параметров фиксируется при существенном отличии прогнозируемых и наблюдаемых значений процесса. При обнаружении скачка параметры фильтра меняются на начальные.

Ключевые слова: прогнозирование, фильтр Калмана, скачкообразное изменение параметров.

Математической моделью многих процессов является система нелинейных разностных уравнений, включающая состояние x_n , управление u_n , возмущение v_n и неизвестные параметры p :

$$x_{n+1} = f(x_n, u_n, v_n, p) \quad (1)$$

Предполагаем, что изменение параметров p во времени носит кусочно-постоянный характер. В некоторых случаях управление u_n может отсутствовать. Кроме того управление u_n обычно известно и его можно явно не записывать в уравнение. Возмущение v_n предполагается сведенным к дискретному белому шуму. Как известно, если возмущение не является белым шумом, его моделируют формирующим фильтром с дискретным белым шумом на входе. Этот формирующий фильтр включается в систему (1). Уравнение наблюдения за процессом:

$$y_n = h(x_n, e_n, p) \quad (2)$$

где h – известная функция,

e_n – белый шум возмущений, при измерении независимый от прочих факторов.

Математической моделью параметра p является марковский процесс:

$$p_{n+1} = \begin{cases} p_n & \text{с вероятностью } \gamma \approx 1 \\ q & \text{с вероятностью } 1 - \gamma \end{cases} \quad (3)$$

где q – независимая непрерывная случайная величина с известным распределением.

Случайные характеристики e_n, v_n, x_0 известны. Требуется по наблюдениям y_n оценивать и прогнозировать состояние процесса x_n .

Задача решается в предположении гладкости функций f, h на основе нормальной аппроксимации всех случайных величин и использования линейных приближений нелинейных зависимостей.

Введем расширенный вектор состояний:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$z_{n+1} = \Phi(z_n, v_n). \quad (4)$$

где

$$z_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n+1} \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix},$$

$$\Phi(z_n, v_n) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n, v_n, \mathbf{p}_n) \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}.$$

Уравнение (4) справедливо на интервале постоянства параметров p .

Построим для модели (2)–(4) фильтр Калмана [1], оценивающий вектор z_n и одновременно вычисляющий вероятности появления очередного измерения y_n , в предположении стабильности параметров p .

Пусть $f_0(z_0)$ – априорная плотность вероятности начального состояния системы (4). Использование гауссовой аппроксимации позволяет ограничиться первыми моментами распределений:

$$\begin{aligned} M\{z_0\} &= M_0 \\ \text{cov}(z_0) &= M z_0 z_0^T = D_0. \end{aligned}$$

Для линейного приближения (4) имеем следующее:

$$\begin{aligned} M\{v_n\} &= 0 \\ \text{cov}(v_n) &= S_n \\ M_v f(x, u, v, p) &= f(x, u, 0, p) \\ M_e h(x, e, p) &= h(x, 0, p) \end{aligned}.$$

Такое возможно при симметричном распределении v, e и нечетных функциях $f(\cdot, \cdot, v, \cdot), h(\cdot, e, \cdot)$.

В результате линеаризации уравнений (1) и (2) исследуемой модели процесса получаем:

$$z_{n+1} = A_n z_n + B_n v_n \quad (5)$$

$$y_n = h_n z_n + e_n \quad (6)$$

где A_n, B_n, h_n – соответствующие производные правых частей уравнений (2) и (4). Производные вычисляются в точках – оценках вектора состояния z .

Введем следующие обозначения:

$$D\{e_n\} = \sigma^2$$

$$M\{z_n\} = m_n$$

$$D\{z_n\} = D_n$$

Не снижая общности задачи можно считать y_n скаляром. Для случая вектора y_n его компоненты можно использовать последовательно. Из уравнения (6) получаем алгоритм уточнения вектора z_n .

$$\mu_n = m_n + \frac{\Gamma_n \cdot h_n}{\sigma^2} (y_n - h(m_n)) \quad (7)$$

$$\Gamma_n = D_n - \frac{D_n h_n^T h_n D_n}{\sigma^2 + h_n D_n h_n^T} \quad (8)$$

$$\mu_{n+1} = A_n \mu_n \quad (9)$$

$$D_{n+1} = A_n \Gamma_n A_n^T + B_n S_n B_n^T \quad (10)$$

где имеем:

$$\mu_n = M(z_n / y_0^n)$$

$$m_n = M(z_n / y_0^{n-1})$$

$$\Gamma_n = \text{cov}(z_n / y_0^n)$$

$$D_n = \text{cov}(z_n / y_0^{n-1})$$

Уравнение прогноза процесса z получается заменой возмущений v_n на его математическое ожидание $M\{v_n\}=0$. Это следует из (5).

$$M(y_n / y_0^{n-1}) = h_n M(z_n / y_0^{n-1}) = h_n m_n$$

$$\text{cov}(y_n / y_0^{n-1}) = h_n D_{n-1} h_n^T + \sigma^2$$

Для принятия решения о скачкообразном изменении параметров обычно сравнивают отклонение измеренного значения от его прогнозируемого значения – математического ожидания, с расчетной дисперсией (или среднеквадратическим отклонением). Превышение отклонения над среднеквадратическим отклонением более чем в 3 раза имеет вероятность ≈ 0.006 , что практически невозможно. При получении таких наблюдений можно принять решение о скачке значений параметров.

Здесь возникает вопрос. С какими моментами распределения сравнивать очередное измерение – с априорным относительно полученного измерения или с апостериорным – вычисленными после получения измерения.

Очевидно, что отношение наблюдаемого выхода от его апостериорного математического ожидания при малой ошибке измерения будет также малым, т.е. большие отклонения в любом случае невозможны. И только разница между наблюдением и прогнозом говорит о рассогласовании модели и процесса. Следовательно, необходимо сравнивать разность:

$$\Delta y_n = |y_n - M(y_n / y_0 \dots y_n)| = |y_n - M(y_n / y_0^{n-1})|$$

с дисперсией $D(y_n / y_0^{n-1})$.

Если $(\Delta y_n / \sqrt{D(y_n / y_0^{n-1})}) > 3$, будем принимать решение о возникновении скачка параметров.

После констатации скачка параметров процесс наблюдения должен обновляться – начаться по отношению к параметрам заново. Из предположения независимости новых значений параметров от прошлого следует, что в уравнениях (7), (8) в векторе μ_n , имеющем компоненты $\mu_{n,x}$ и $\mu_{n,p}$, необходимо вторую компоненту заменить на априорное среднее $\mu_{0,p}$. Матрица ковариации вычисляется по формуле:

$$D_n = \begin{pmatrix} D_{n,xx} & D_{n,xp} \\ D_{n,xp} & D_{n,pp} \end{pmatrix},$$

где каждая подматрица, соответствующая подвекторам x и p , заменяется матрицей следующего вида:

$$\tilde{D}_n = \begin{pmatrix} D_{n,xx} & 0 \\ 0 & D_{0,pp} \end{pmatrix}.$$

$D_{0,pp}$ – априорная матрица ковариации параметров p . Недиагональные блоки равны нулевым матрицам в силу независимости новых значений параметров. Далее процесс оценивания осуществляется согласно уравнениям (7)–(10).

Имитационное моделирование предложенных алгоритмов показало их работоспособность. Причем чем больше интервал постоянства параметров, тем точнее определяется момент скачка, т.к. в асимптотике неизвестные параметры p оцениваются практически точно и дисперсия $D(y_n / y_0^{n-1})$ определяется в основном ошибкой измерения e_n . И, наоборот, при частом изменении параметров предложенный метод становится неработоспособным (как и любой другой). В частном случае, когда уравнения модели процесса линейны и по состоянию и по параметрам:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= Ax_n + p + v_n, \\y_n &= Hx_n + e_n\end{aligned},$$

тогда матрицы уравнений (5) и (6) принимают вид:

$$A_n = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad B_n = \begin{bmatrix} E \\ 0 \end{bmatrix}, \quad h_n = [H \quad 0]$$

В этих блочных матрицах составляющие элементы-блоки имеют размерность n .

Библиографический список

1. Kalman, R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems / R.E. Kalman. – Trans. ASME. Ser. D., 1960, vol. 82.