УДК 517.984.64

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

П.О. Москвичёва

В данной работе исследована устойчивость нулевого решения обобщенного уравнения Хоффа, заданного на конечном, связном и ориентированном графе с условиями непрерывности и баланса потоков в его вершинах.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, фазовое пространство, граф, функция Ляпунова.

Уравнение Хоффа [1]:

$$(\lambda-\lambda_0)u_t+u_{xxt}=\alpha_1 u+\alpha_2 u^3+\ldots+\alpha_n u^{2n-1}, n\in N, \tag{1}$$

моделирует динамику выпучивания двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Начально-краевые задачи для уравнения (1) первым начал изучать Н.А. Сидоров [2] со своими учениками [3], [4]. Они первыми обнаружили феномен принципиальной неразрешимости этих задач при произвольных начальных данных. В [5] было начато исследование множества допустимых начальных данных, понимаемое как фазовое пространство уравнения (1). В [6] было показано, что фазовым пространством уравнения (1) служит простое банахово C^∞-многообразие. В работе [7] было исследовано фазовое пространство обобщенного уравнения Хоффа.

Пусть $\mathrm{G}=(\mathrm{V};\mathrm{E})$ – конечный связный ориентированный граф, где $\mathrm{V}=\{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathrm{E}=\{E_j\}$ – множество ребер, причем каждому ребру E_j поставлены в соответствие два положительных числа $l_j,d_j\in\mathrm{R}_+$, которые в контексте нашей задачи будут иметь физический смысл длины и площади поперечного сечения ребра соответственно. На каждом ребре E_j зададим обобщенное уравнение Хоффа:

$$\left(\lambda_j - \lambda_{0j}\right)u_{jt} + u_{jxxt} = \alpha_{1j}u_j + \alpha_{2j}u_j^3 + \ldots + \alpha_{nj}u_j^{2n-1}, n \in N, \tag{2}$$

где параметры $\lambda_j \in R_+$ соответствуют нагрузке на балку, а параметры $\alpha_{sj} \in R, s = 1, 2, \ldots n$ характеризуют свойства материала j-ой балки; переменные $x \in (0; l_j), t \in R$.

Для уравнений (1) в каждой вершине графа зададим условия

$$u_j(0,t) = u_k(0,t) = u_m(l_m,t) = u_p(l_p,t), \tag{3}$$

$$\sum_j d_j u_{jx}(0,t) - \sum_m d_m u_{mx}(l_m,t) = 0, \tag{4}$$

где $E_j, E_k \in E^{\alpha}(V_i), E_m, E_p \in E^{\omega}(V_i), t \in R$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i. Кроме того, искомые компоненты должны удовлетворять начальным условиям Коши:

$$u_j(x,0) = u_{j0}(x), \qquad x \in (0, l_j). \tag{5}$$

Начально-краевая задача (2)–(5) описанная дифференциальными уравнениями с частными производными, заданными на графе и представляет собой модель для изучения поведения нагруженной конструкции из двутавровых балок.

Статья кроме вводной части содержит два параграфа и список литературы. В п.1 содержится редукция задачи (2)–(5) к задаче Коши:

$$u(0) = u_0 \tag{6}$$

для абстрактного уравнения соболевского типа:

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{7}$$

где L, M – линейные, а N — нелинейный операторы, определенные на специально подобранных функциональных пространствах.

Результаты п.1 были подробно изложены в [7]. П.2 посвящен исследованию устойчивости стационарного решения $O = (0,0,\ldots 0,\ldots)$ задачи (2)–(5) в терминах потока и функций Ляпунова. Все абстрактные результаты являются обобщениями соответствующих результатов гл. 4 [8]. Их приложения к задаче (2)–(5) представляют главное содержание статьи.

Фазовое пространство. Введем в рассмотрение гильбертово пространство:

$$L_2(G) = \left\{g = (g_1, g_2, \ldots g_j, \ldots) : g_j \in L_2(0, l_j)\right\}$$

со скалярным произведением и нормой соответственно:

$$\langle g,h \rangle = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} d_j(x) h_j(x) dx \qquad \|g\|^2 = \sum_{E_j \in E} d_j \int_0^{l_j} d_j^2 dx$$

и гильбертово пространство $U = \{u = (u_1, u_2, \ldots u_j, \ldots) : u_j \in W_2^1(0, l_j),$ и выполнено условие (3) со скалярным произведением:

$$[u,v]=\sum_{E_j\in \mathrm{E}} d_j\int_0^{l_j}(u_{jx}v_{jx}+u_jv_j)dx.$$

Формулой $\langle Au,v\rangle=\sum_j d_j\int_0^{l_j}(u_{jx}v_{jx}+a_ju_jv_j)dx,\quad u,v\in U$ определим оператор $A:U\to F,$ где $a_j\in R_+$ – произвольные константы. Теперь построим операторы $L,M:U\to F$

$$\langle Lu,v\rangle=\sum_j d_j(\lambda_j-\lambda_{0j}+a_j)\int_0^{l_j}u_jv_jdx-\langle Au,v\rangle,$$

$$\langle Mu,v\rangle=\sum_j \alpha_{1j}d_j\int_0^{l_j}u_jv_jdx.$$

Очевидно, что операторы L,M линейны и непрерывны, причем оператор L фредгольмов (т.е. $\operatorname{ind}L=0$), а оператор M компактен. Теперь построим оператор:

$$\langle N(u),v\rangle=\sum_j d_j\left(\alpha_{2j}\int_0^{l_j}u_j^3v_jdx+...+\alpha_{nj}\int_0^{l_j}u_j^{2n-1}v_jdx\right)$$

и убедимся, что он действует из пространства U в пространство F. Для этого построим вспомогательное пространство:

$$L_{2n}(G)=\{g=(g_1,g_2,...g_j,...):g_j\in L_{2n}(0,l_j)\}.$$

Очевидно, имеют место плотные и непрерывные вложения:

$$U\to L_{2n}(G)\to L_2(G).$$

Обозначим через $L^*_{2n}(G)$ сопряженное к $L_{2n}(G)$ относительно двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ пространство. Пространство $L^*_{2n}(G)$ топлинейно изоморфно пространству:

$$L_{\frac{2n}{2n-1}}(G)=\left\{g=(g_1,g_2,...g_j,...):g_j\in L_{\frac{2n}{2n-1}}(0,l_j)\right\}.$$

Норма пространства $L_p(G)$ задается следующим образом:

$$\|u\|_p=\sum_j d_j\left(\int_0^{l_j}|u_j|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера и непрерывности вложений:

$$L_{2n}(0,l_j)\to L_{2s}(0,l_j)\to L_2(0,l_j),\quad s=1,2,...,n$$

получим $|\langle N(u),v\rangle|\le c_1\max_j\{|\alpha_{2j}|\}\|u\|_{2n}^3\|v\|_{2n}+...+c_{n-1}\max_j\{|\alpha_{nj}|\}\|u\|_{2n}^{2n-1}\|v\|_{2n},$ где константы $c_i\in R_+,i=1,...,n-1$ и не зависят ни от u ни от v, то есть действие оператора $N:L_{2n}(G)\to L_{\frac{2n}{2n-1}}(G)$ имеет место. Действие оператора $N:U\to F$

имеет место в силу вложения $U \to L_{2n}(G),$ из которого следует вложение $L_{\frac{2n}{2n-1}}(G) \to F.$ Кроме того, нетрудно показать, что при любых $\alpha_{2j}, \alpha_{3j}, ..., \alpha_{nj} \in R$ оператор $N \in C^{\infty}(U,F).$

Итак, мы редуцировали задачу (2)–(5) к задаче (6)–(7). Теперь исследуем фазовое пространство задачи (2)–(5).

Вектор-функцию $u \in C^{\infty}(R,U)$ назовем *решением уравнения* (7), если она удовлетворяет этому уравнению.

Определение 1. Множество $P \subset U$ называется *фазовым пространством уравнения* (7), если:

(i) любое решение $u = u(t)$ лежит в P поточечно, т.е. $u(t) \in P, t \in R;$

(ii) при любом $u_0 \in P$ существует единственное решение задачи Коши (6), (7).

Выберем в ядре $\ker L$ ортонормированный (в смысле $\langle \cdot,\cdot \rangle$ базис):

$$\ker L = \mathrm{span}\{\chi_k : k = 1,2,...l\},$$

и отождествим его с базисом $\mathrm{co}\ker L.$ Так как $U^0 = \ker L,$ то все решения уравнений (2) будут с необходимостью лежать во множестве:

$$M = \{u \in U : \langle Mu + N(u), \chi_k \rangle = 0, k = 1,2,...l\}$$

как траектория.

Теорема 1. *Пусть выполнено*

(i) $\ker L = \{0\}$. *Тогда фазовым пространством уравнения (7) служит все пространство* U.

(ii) $\ker L \neq \{0\},$ *все коэффициенты* $\alpha_{kj} \neq 0,$ $k = 1,...n$ *одного знака. Тогда фазовым пространством уравнения (7) служит простое многообразие* M.

Устойчивость. Пусть $\mathbf{V}$ — нормированное пространство. Говорят, что на $\mathbf{V}$ задан *поток*, если существует отображение S такое, что для любого $u \in \mathrm{V}$ и некоторого $\tau = \tau(u) \in R_+$ выполняются соотношения:

(i) $S = S(t,u) \in \mathbf{V}$, при всех $t \in (-\tau;\tau);$ $S(0,u) = u$;

(ii) $S(t+s,u) = S(t,S(s,u)) \in \mathbf{V}$ при всех $t+s \in (-\tau;\tau)$.

Точка такая, что $S(t,u) = u,$ $t \in R,$ называется *стационарной точкой* потока S .

Определение 2. Стационарная точка u потока S называется:

(i) *устойчивой* (по Ляпунову), если для любой окрестности $\mathbf{O}_u$ точки u существует (возможно, другая) окрестность $\mathbf{O}_u^{'}$ той же точки, что $S(t,v) \in \mathbf{O}_u^{'}$ при всех $v \in \mathbf{O}_u$ и $\mathrm{t} \in \mathrm{R}_+$;

(ii) *асимптотически устойчивой* (по Ляпунову), если она устойчива и для любой точки v из некоторой окрестности $\mathrm{O_u}$ точки u выполняется $\mathrm{S(t,v)} \to \mathrm{u}$ при $\mathrm{t} \to \infty$.

Определение 3. Функционал $V \in C(U,R)$ называется *функционалом Ляпунова* потока S, если:

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim_{t \to 0+}} \frac{1}{t}(V(S(t,u)) - V(u)) \le 0$$

для всех $u \in U$.

Теорема 2. *Пусть u – стационарная точка потока S на U. Если для потока S существует функционал Ляпунова такой, что:*

(i) $V(u) = 0$;

(ii) $V(v) \ge \varphi(\|v-u\|)$;

где φ – строго возрастающая непрерывная функция такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(r) > 0$ при $r \in R_+$, то точка u устойчива.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и существует строго возрастающая непрерывная функция ψ такая, что $\psi(0) = 0$ и $\psi(r) > 0$ при $r \in R_+$, причем $\dot{V}(u) \le -\psi(\|v-u\|)$,* тогда точка *$u$ асимптотически устойчива.*

Применим теоремы 2 и 3 к исследованию устойчивости задачи (2)–(5). Рассмотрим два случая. Пусть сперва $\lambda_j \ne \lambda_{oj}$. В этом случае задача (2)–(5) порождает поток на банаховом пространстве U. Снабдив это пространство нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_4}$, превратим его в нормированное. Определив функционал Ляпунова как:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda_{0j} - \lambda_j) u_j^2) dx,$$

мы сразу получим выполнение условия (i) теоремы 2. Далее, в силу непрерывности вложения $U \to L_4(\mathrm{G})$ мы имеем $V(u) \ge (c\|u\|)^2$, где c – константа вложения. Таким образом, условие (ii) тоже выполнено. Наконец заметим, что в силу эквивалентности нормы в $L_4(\mathrm{G})$ имеем:

$$\sum_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^4 dx \ge (c_1 \|u\|_{L_4})^4.$$

Поэтому $\dot{V}(u) \le -2\alpha(c_1\|u\|)^4$, что показывает выполнение условия теоремы 3.

В случае $\lambda_j = \lambda_{oj}$ можно привести к уравнению, которое определяет поток на $U^1 = \{u \in U : \langle u, \varphi \rangle = 0\}$. Определив функционал Ляпунова как:

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathrm{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{1jx}^2 dx,$$

мы получим выполнение условия (i) теоремы 2. Кроме того, $V^{1/2}$ определяет норму на U^1, эквивалентную индуцированной из U. Значит, $V(u) \geq (c\|u\|)^2$ в силу теоремы вложения. Таким образом доказана.

Теорема 4. *(i) При любых* $\alpha_{nj} \in R_+$ *и* $\lambda_j \in [0, \lambda_{0j})$ *решение* $O = (0, 0, \ldots 0, \ldots)$ *задачи (2)–(4) асимптотически устойчиво*.

(ii) При любых $\alpha_{nj} \in R_+$ *и* $\lambda_j = \lambda_{0j}$ *решение* $O = (0, 0, \ldots 0, \ldots)$ *задачи (2)–(4) устойчиво*.

Мы доказали асимптотическую устойчивость задачи (2)-(5) при $\lambda_j \in [0, \lambda_{oj})$ и устойчивость при $\lambda_j = \lambda_{oj}$. Параметр λ_j характеризует нагрузку, поэтому он неотрицателен. Значит, λ_{oj} выступает здесь как предельная нагрузка на j-ю балку, при которой она еще устойчива.

Библиографический список

1. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // Aeron. Quarterly 7, 1956, №1, P. 1–20.

2. Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления / Н.А. Сидоров // Иркутск: Изд-во Иркутского гос. ун-та, 1982.

3. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвлений при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференциальные уравнения. – 1983. – Т.19, №9. – С. 1516–1526.

4. Сидоров, Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. Уравнения. – 1987. – Т.23, № 4. – С. 726–728.

5. Свиридюк, Г.А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т.57, №3. – С. 192–207.

6. Свиридюк, Г.А. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, В.О. Казак // Мат. заметки. – 2002. – Т. 71, №2. – С. 292–297.

7. Баязитова, А.А. Обобщенная задача Штурма-Лиувилля на графе / А.А. Баязитова // Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г. Крейна — 2010.: тез. докл. — Воронеж, 2010. – С. 18–19.

8. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений / Д. Хенри. – М.: Мир, 1985.

К содержанию