УДК 64.066.8:519.722

ЭНТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД К РИСК-АНАЛИЗУ СИСТЕМ КРИТИЧНЫХ ИНФРАСТРУКТУР

А.Н. Тырсин, А.А. Сурина

В докладе рассмотрены общие вопросы разработки энтропийно-вероятностного подхода для решения задач исследования безопасности взаимозависимых критичных инфраструктур. Сформулирована гипотеза о повышении безопасности сложной системы с ростом энтропии. Предложен подход к моделированию взаимозависимых инфраструктур.

Ключевые слова: риск-анализ, энтропия, модель, сложная система, критичная инфраструктура, управление, случайная величина.

Одной из актуальных проблем в теории риска является построение адекватных моделей сложных систем. Сложные системы многогранны, определяются множеством различных показателей, затрудняющими выбор единого критерия эффективности управления, характеризуются тем, что взаимодействие их элементов (подсистем) нельзя или крайне затруднительно представить в явном виде. Поэтому традиционные модели представления, основанные на параллельно-последовательном структурировании систем [1] не всегда являются их адекватным описанием. Использование сценарных логико-вероятностных моделей [2, 3] и в виде графов [4] требует больших усилий и наличия значительной априорной информации об объекте исследования, что не всегда практически реализуемо.

Актуальным направлением математического моделирования сложных систем является моделирование с помощью энтропийных методов. В основе этих методов лежит использование энтропии в качестве критерия оценки функционирования системы. Это обусловлено тем, что энтропия – универсальный показатель, свойственный различным категориям социально-экономических, территориальных, биологических и других систем.

Современная физика предоставляет полезный инструмент для свертывания всех значимых параметров задачи в один на основе использования понятия энтропии. Энтропия является универсальным физическим параметром, позволяющим объединять различные проявления физического мира в единое целое, то есть, служить общим знаменателем. Понятие энтропии все шире используется в современной науке для описания структурной дезорганизации, степени разрушения связей между элементами системы, и вообще, для описания степени деградации любой замкнутой системы, включая территориальные образования [5–8]. Разложение суммарной энтропии на ее составляющие – энтропии взаимодействия, конфигурации, локальной, структурной и т.д., позволяет выработать решения по их уменьшению. Поэтому представляется, что энтропия может выступать в роли универсального параметра и идеально подходит для решения задач риск-менеджмента сложных систем, представляемых в виде совокупности взаимозависимых критичных инфраструктур (КИ) [4, 9].

В докладе рассмотрены общие вопросы разработки энтропийно-вероятностного подхода для решения задач исследования безопасности взаимозависимых КИ. Данный подход позволяет преодолеть проблему разнородности исходных данных, поскольку все физические меры различных инженерных задач будут приведены к одной безразмерной мере – энтропии.

Пусть X – некоторая случайная величина, характеризующая функционирование одной КИ. Пусть ее закон распределения известен. Если X – дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений $x_1,\ldots,x_n$, так что:

$$P_X(x_i) = p_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\,,\ p_i \ge 0\,,\ i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Тогда обычно энтропия определяется как:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i\,, \tag{1}$$

которую называют информационной энтропией [10]. От основания логарифма в (1) зависит единица измерения информации и энтропии.

Если для распределения случайной величины известен закон распределения, то от знака суммирования можно перейти к интегралу

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\log p(x)dx\,, \tag{2}$$

где $p(x)$ – плотность распределения случайная величина X. Полученная по формуле (2) энтропия называется энтропией закона распределения или дифференциальной энтропией.

При замене интеграла на конечную сумму в (2), нетрудно убедиться, что информационная (1) и дифференциальная (2) энтропии отличаются друг от друга на константу.

Однако, дифференциальная энтропия, являясь числовой характеристикой (функционалом) закона распределения $p(x)$, имеет ясную интерпретацию и поэтому более предпочтительна для использования.

Для удобства возьмем в (2) натуральное основание логарифма:

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \ln p(x) dx .$$

Взаимозависимые инфраструктуры рассматриваем как элементы сложной системы S. Тогда систему S можно представить в виде многомерной случайной величины $\mathbf{X} = (X_1, X_2, .., X_n)^T$.

Каждый элемент X_i этого вектора является одномерной случайной величиной, которая характеризует функционирование соответствующей КИ исследуемой сложной системы. Элементы могут быть как взаимозависимыми, так и не зависеть друг от друга. С учетом вышеизложенного замечания, энтропию многомерной случайной величины **X** будем определять по формуле:

$$H(\mathbf{X}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, x_2, ..., x_n) \ln p(x_1, x_2, ..., x_n) dx_1 dx_2 ... dx_n , \quad (3)$$

причем $H(\mathbf{X}) \le \sum_{i=1}^{n} H(X_i)$, где равенство достигается только при условии взаимной независимости случайных величин $X_1, X_2, .., X_n$.

Сделаем две предпосылки.

1°. Считаем, что компоненты X_i случайного вектора:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix},$$

имеет нормальное распределение $X_i \sim N(a_i, \sigma_i^2)$, т.е. $p_{X_i}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma_i^2}}$, $i = 1, 2, ..., n$.

2°. Для случайного вектора **X** известна или может быть определена по выборке его ковариационная матрица:

$$\mathbf{\Sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{n\times n} = \begin{pmatrix} \mathrm{cov}(X_1, X_1) & \mathrm{cov}(X_1, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_1, X_n) \\ \mathrm{cov}(X_2, X_1) & \mathrm{cov}(X_2, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_2, X_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{cov}(X_n, X_1) & \mathrm{cov}(X_n, X_2) & \dots & \mathrm{cov}(X_n, X_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}.$$

Определим энтропию $H(\mathbf{X})$. Введем вектор математических ожиданий $\mathbf{a} = (a_1, a_2, .., a_n)^T$. Тогда с учетом 1° и 2° получим:

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{a})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{a})^T \right\},$$

где $|\mathbf{\Sigma}|$ – определитель матрицы $\mathbf{\Sigma}$. Далее преобразуем (3):

$$H(\mathbf{X}) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, ..., x_n) \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{a})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{a})^T \right\} \right) dx_1 ... dx_n =$$

$$= \ln\left((2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, ..., x_n)\, dx_1 ... dx_n +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1, ..., x_n)(\mathbf{X}-\mathbf{a})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\mathbf{X}-\mathbf{a})^T \, dx_1 ... dx_n =$$

$$= \ln\left[(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\mathbf{\Sigma}|^{\frac{1}{2}} \right] + \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi)^n |\mathbf{\Sigma}|\right] + \frac{1}{2}\ln e^n = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n |\mathbf{\Sigma}|\right].$$

Таким образом, энтропия случайного нормального вектора $\mathbf{X}$ равна:

$$H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n |\mathbf{\Sigma}|\right]. \tag{4}$$

Из (4) видно, что энтропия $H(\mathbf{X})$ является элементарной функцией от определителя ковариационной матрицы $\mathbf{\Sigma}$. Поэтому соотношение (4) представляет собой простую математическую модель, позволяющую строить простые оптимизационные алгоритмы. В [7] показано, что наиболее безопасное состояние конструкции соответствует ее максимальной неопределенности, т.е. максимуму энтропии. Представляется оправданным, что данный вывод можно распространить на любую сложную систему.

Сделанные предположения 1°, 2° основаны на центральной предельной теореме. Если условия задачи не позволяют считать вектор $\mathbf{X}$ нормальным, то можно выполнить «энергетическую» линеаризацию исходных данных. Ее суть состоит в представлении случайных компонент X_i нормально распределенными со средними значениями и дисперсиями, равными их выборочным оценкам, найденным по исходным данным.

Сформулируем гипотезу о том, что рост энтропии соответствует повышению безопасности сложной системы. Данное предположение соответствует результатам, полученным в ряде публикаций [4–8]. В результате задачу увеличения безопасности сложной системы можно существенно упростить и унифицировать. Действительно, она может быть заменена на более формализованную задачу повышения энтропии исследуемой системы. Увеличить энтропию всей системы можно достичь за счет роста неопределенности одной или нескольких ее подсистем. При этом возникает известная трудность, связанная с локализацией и распределением ограниченных ресурсов для обеспечения необходимого развития системы. В данной работе предлагается концепция «точек роста». Суть ее в том, что управляющее воздействие целенаправленно концентрируют в конкретной «точке роста». Поскольку система представляет собой взаимосвязанное единое целое, то воздействие на правильно подобранную точку в ней спровоцирует процессы, способствующие повышению безопасности функционирования всей системы целиком.

Таким образом, в моделировании безопасности сложных систем КИ можно сформулировать следующие актуальные задачи: что является универсальным критерием эффективности управления системой; какую точку выбрать для активизации процессов, которые обеспечат развитие этой точки с последующим эффективным развитием всей системы; какие минимальные ресурсы нужно привлечь, чтобы запустить эти процессы.

Анализ предложенной базовой энтропийно-вероятностной модели безопасности системы КИ в виде (3), (4) показывает, что одним из путей увеличения (максимизации) энтропии многомерной случайной величины является добавление некоторой нормально распределенной случайной величины U в одну из ее составляющих $X_1, X_2, .., X_n$. Ее дисперсия σ_u^2 – это эквивалент уровня воздействия, оказываемого на соответствующую компоненту случайного вектора $\mathbf{X}$. На практике это может выглядеть как вложение дополнительных ресурсов (в том числе финансовых) в одну из КИ – «точку роста». Взаимосвязанность КИ приведет к повышению безопасности все системы целиком.

Из (4) следует, что целевая функция данного метода максимизации энтропии имеет вид:

$$H(X_1, X_2, ..., X_i + U, ..., X_n) = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n (|\Sigma| + \sigma_u^2 M_{ii})\right],$$

где M_{ii} – минор i-ой строки и i-го столбца матрицы $\mathbf{\Sigma}$.

Следовательно, задача максимизации энтропии принимает вид:

$$\begin{cases} H(X_1, X_2, ..., X_i + U, ..., X_n) \to \max\limits_{i \in [1,n]}, \\ \mathbf{\Sigma}_{\mathrm{X}} = \mathbf{\Sigma}, \\ \sigma_u^2 = \sigma^2, \\ \operatorname{cov}(U, X_i) = 0, \ \ i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (5)$$

Задача (5) позволит осуществить эффективное управление системой КИ. Ее решение обеспечит максимальный прирост энтропии, а значит, и безопасности всей системы.

Если имеется возможность одновременного воздействия на несколько КИ, то задачу (5) можно усложнить. В этом случае будем аддитивно воздействовать на многомерную случайную величину **X** дополнительным вектором, элементы которого не зависят от элементов исходной случайной величины. Тогда получим задачу максимального прироста энтропии многомерной случайной величины путем добавления нормально распределенных случайных величин U_i, $U_i \sim N(a_{u_i}, \sigma_{u_i}^2)$, $(i=1,2,...,n)$ к компонентам X_i. случайной величины **X**. Считаем, что $\mathrm{cov}(X_i, U_i)=0$, $i=1,2,...,n$. Введем обозначения:

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ... \\ U_n \end{pmatrix},\ \mathbf{\Omega}_u=\begin{pmatrix} \sigma_{u_1}^2 \\ \sigma_{u_2}^2 \\ ... \\ \sigma_{u_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что энтропия вектора $\mathbf{X}^*=\mathbf{X}+\mathbf{U}$ будет определяться по формуле:

$$H(\mathbf{X}^*)=\frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^n\left(|\mathbf{\Sigma}|+\sum_{i=1}^{n}\sigma_{u_i}^2 M_{ii}^*\right)\right], \tag{6}$$

где

$$M_{11}^*=\begin{vmatrix} \sigma_2^2+\sigma_{u_2}^2 & \sigma_{23} & ... & \sigma_{2n} \\ \sigma_{32} & \sigma_3^2+\sigma_{u_3}^2 & ... & \sigma_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & ... & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{vmatrix},\ M_{22}^*=\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{31} & \sigma_3^2+\sigma_{u_3}^2 & ... & \sigma_{3n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n3} & ... & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{vmatrix},$$

…

$$M_{nn}^*=\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1,n-1} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & ... & \sigma_{2,n-1} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & ... & \sigma_{n-1}^2 \end{vmatrix}=M_{nn}.$$

Действительно, поскольку энтропия n-мерной нормально распределенной случайной величины **X** определяется по формуле (4), следовательно, при переходе к $\mathbf{X}^*$ в расчетной формуле энтропии изменится только ковариационная матрица. Она примет вид:

$$\mathbf{\Sigma}^*=\begin{pmatrix} \sigma_1^2+\sigma_{u_1}^2 & \sigma_{12} & ... & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2+\sigma_{u_2}^2 & ... & \sigma_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & ... & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее определитель:

$$\left|\mathbf{\Sigma}^*\right| = \begin{vmatrix} \sigma_1^2+\sigma_{u_1}^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2+\sigma_{u_2}^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_n^2 \end{vmatrix} +$$

$$+\sigma_{u_1}^2 \begin{vmatrix} \sigma_2^2+\sigma_{u_2}^2 & \sigma_{23} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \sigma_{32} & \sigma_3^2+\sigma_{u_3}^2 & \ldots & \sigma_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n2} & \sigma_{n3} & \ldots & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{vmatrix} + \sigma_{u_2}^2 \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{13} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{31} & \sigma_3^2+\sigma_{u_3}^2 & \ldots & \sigma_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n3} & \ldots & \sigma_n^2+\sigma_{u_n}^2 \end{vmatrix} + \ldots$$

$$\ldots+\sigma_{u_n}^2 \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1,n-1} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \ldots & \sigma_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sigma_{n-1,1} & \sigma_{n-1,2} & \ldots & \sigma_{n-1}^2 \end{vmatrix} = \left|\mathbf{\Sigma}\right| + \sum_{i=1}^{n} \sigma_{u_i}^2 M_{ii}^* ,$$

откуда следует справедливость формулы (6).

Следовательно, зная формулу изменения энтропии случайного вектора **X**, можно установить те его компоненты, добавление к которым новых случайных величин U_i приведет к максимальному увеличению энтропии. Таким образом, сформулирована следующая задача нелинейного программирования:

$$\begin{cases} H(\mathbf{X}+\mathbf{U}) \to \max\limits_{\mathbf{\Omega}_u}, \\ \mathbf{\Sigma}_{\mathbf{X}} = \mathbf{\Sigma}, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_{u_i}^2 = D, \\ \sigma_{u_i}^2 \ge 0,\ i=1,2,\ldots,n, \\ \operatorname{cov}(U_i, X_j) = 0,\ i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n. \end{cases} \tag{7}$$

Решение задачи (7) позволяет обеспечить максимальный прирост энтропии многомерной случайной величины.

Пример. Приведем в качестве иллюстрации изложенного энтропийно-вероятностного подхода пример решения задачи (7). Сгенерируем выборку объема $N=100$ для некоторого случайного вектора размерности $n=3$. Корреляционная матрица оказалась равной:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0{,}818 & 0{,}751 & 0{,}120 \\ 0{,}751 & 0{,}857 & 0{,}459 \\ 0{,}120 & 0{,}459 & 0{,}836 \end{pmatrix}.$$

Вычислим для полученной выборки энтропии всех компонент и случайного вектора в целом: $H(X_1) = 1{,}772$, $H(X_2) = 1{,}667$, $H(X_3) = 1{,}427$, $H(\mathbf{X}) = 3{,}506$. Зададим $D = 1$. Тогда имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} H(X_1+U_1, X_2+U_2, X_3+U_3) \to \max\limits_{\boldsymbol{\Omega}_u}, \\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{X}} = \boldsymbol{\Sigma}, \\ \sum\limits_{i=1}^{3} \sigma_{u_i}^2 = 1, \\ \sigma_{u_i}^2 \ge 0, \ i = 1,2,3, \\ \operatorname{cov}(U_i, X_j) = 0, \ i = 1,2,3, \ j = 1,2,3. \end{cases} \tag{8}$$

где

$$H(\mathbf{X}^*) = \frac{1}{2}\ln\left[(2\pi e)^3\left(|\boldsymbol{\Sigma}| + \sum_{i=1}^{3}\sigma_{u_i}^2 M_{ii}^*\right)\right],$$

$$|\boldsymbol{\Sigma}| = \begin{vmatrix} 0{,}818 & 0{,}751 & 0{,}120 \\ 0{,}751 & 0{,}857 & 0{,}459 \\ 0{,}120 & 0{,}459 & 0{,}836 \end{vmatrix} = 0{,}0128, \quad M_{11}^* = \begin{vmatrix} 0{,}857+\sigma_{u_2}^2 & 0{,}459 \\ 0{,}459 & 0{,}836+\sigma_{u_3}^2 \end{vmatrix},$$

$$M_{22}^* = \begin{vmatrix} 0{,}818 & 0{,}120 \\ 0{,}120 & 0{,}836+\sigma_{u_3}^2 \end{vmatrix}, \quad M_{33}^* = \begin{vmatrix} 0{,}818 & 0{,}751 \\ 0{,}751 & 0{,}857 \end{vmatrix}.$$

Решение задачу (8) дает: $\sigma_{u_1}^2 = 0{,}364$, $\sigma_{u_2}^2 = 0{,}635$, $\sigma_{u_3}^2 = 0{,}001$. При этом максимальное значение энтропии составит $H(\mathbf{X}^*) = 3{,}596$.

Выводы

1. Сформулирована гипотеза о том, что рост энтропии сложной системы соответствует повышению безопасности ее функционирования. На ее основе предложен энтропийно-вероятностный подход моделирования взаимозависимых КИ.

2. В основе энтропийно-вероятностного моделирования лежит представление системы в виде многомерного нормального случайного вектора. В качестве критерия эффективности использован максимальный прирост энтропии за счет увеличения неопределенности компонент случайного вектора.

3. К достоинствам предложенного подхода следует отнести следующее:

– простота реализации;

– энтропийно-вероятностная модель применима при решении задачи эффективного управления системой КИ с целью повышения безопасности ее функционирования;

– универсальность и применимость для сложных систем различной природы.

Библиографический список

1. Borge, D. The Book of Risk / D. Borge // John Wiley & Sons, Inc. – 2001.

2. Crouhy, M. The Essentials of Risk Management / M. Crouhy, D. Galai, R. Mark // McGraw-Hill. – 2006.

3. King, J. Operational Risk: Measurement and Modeling / J. King // Wiley. Chichester, UK. – 2001.

4. Wallace, W.A. Managing Disruptions to Critical Interdependent Infrastructures in the Context of the 2001 World Trade Center Attack / W.A. Wallace, D. Mendonca, E. Lee, J. Mitchell, J. Chow // Critical Infrastructures. 2006. – 4. – Pp. 235–264.

5. Wilson, A.G. Entropy in Urban and Regional Modelling / A.G. Wilson // Pion Limited. London. – 1970.

6. Muhlbauer, W. K. Pipeline Risk Management Manual / W. K. Muhlbauer // Ideas, Techniques, and Resources. Third Edition. Elsevier Inc. – 2004.

7. Skorobogatov, S.M. A design of structures using crack indeterminacy and information entropy / S.M. Skorobogatov, A.A. Khaykov // Proceedings of International conference Concrete 200. Scotland, Dundee, Sept. – 1993. – Pp. 12.

8. Haken, H. Information and Self-Organization. A Macroscopic Approach to Complex Systems / H. Haken // Springer-Verlag Berlin Heidelberg. – 1988.

9. Rinaldi, S.M. Understanding, and Analyzing Critical Infrastructure Interdependencies / S.M. Rinaldi, J.P. Peerenboom, T.K. Kelly // IEEE Control Systems Magazine (December). – 2001. – Pp.11–25.

10. Cover, T.M. Elements of Information Theory. Second Edition / T.M. Cover, J.A. Thomas // John Wiley & Sons, Inc. – 2006.