УДК532.59

ВОЛНОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТЕКАЮЩЕЙ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ ПРИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ МАРАНГОНИ

Л.А. Прокудина

Представлена математическая модель волнового течения неизотермической пленки жидкости. Коэффициенты дисперсионного уравнения включают, в частности, градиенты температуры, поверхностную вязкость. Рассчитаны волновые характеристики, области неустойчивости вертикальной пленки воды при неустойчивости Марангони. Определены волновые числа, соответствующие максимальному значению инкремента, при умеренных числах Рейнольдса.

Ключевые слова: жидкая пленка; неустойчивость Марангони; инкремент; фазовая скорость.

Технологические процессы, связанные с переносом тепла и массы через поверхность раздела между жидкой и газовой фазами [1, 2], широко распространены в химической, нефтехимической, энергетической, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Тепломассообменные аппараты, в которых реализуется течение тонких пленок жидкости под действием силы тяжести, весьма перспективны в химической, нефтехимической технологии. В тонких пленках жидкости обеспечиваются высокие скорости переноса тепла и массы в сочетании с малой толщиной пленки, но то же время приходиться решать сложнейшие вопросы, связанные с межфазной неустойчивостью, влиянием на нее разнообразных физико-химических факторов, обусловленных, например, наличием градиентов температуры, концентрации вещества на межфазной поверхности, фазовыми переходами. Межфазная неустойчивость, связанная с эффектом Марангони, затрагивает вопросы формирования и развития диссипативных структур. Формирование диссипативных структур в виде ячеек, вихревых потоков наблюдается как при экспериментальных исследованиях, так и при работе технологического оборудования. Исследование таких явлений в пленках жидкости представляют значительный интерес для науки и проектирования современной пленочной аппаратуры.

Математическая модель течения трехмерной пленки жидкости толщиной δ по твердой наклонной поверхности под действием силы тяжести представляет собой систему уравнений Навье–Стокса и уравнения неразрывности с граничными условиями, учитывающими влияние процессов тепломассопереноса, имеет вид [3, 4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_+}{\partial t_+} + u_+ \dfrac{\partial u_+}{\partial x_+} + v_+ \dfrac{\partial u_+}{\partial y_+} + w_+ \dfrac{\partial u_+}{\partial z_+} = -\dfrac{\partial P_+}{\partial x_+} + F_x + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial y_+^2} + \dfrac{\partial^2 u_+}{\partial z_+^2}\right), \\ \dfrac{\partial v_+}{\partial t_+} + u_+ \dfrac{\partial v_+}{\partial x_+} + v_+ \dfrac{\partial v_+}{\partial y_+} + w_+ \dfrac{\partial v_+}{\partial z_+} = -\dfrac{\partial P_+}{\partial y_+} + F_y + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 v_+}{\partial x_+^2} + \dfrac{\partial^2 v_+}{\partial y_+^2} + \dfrac{\partial^2 v_+}{\partial z_+^2}\right), \\ \dfrac{\partial w_+}{\partial t_+} + u_+ \dfrac{\partial w_+}{\partial x_+} + v_+ \dfrac{\partial w_+}{\partial y_+} + w_+ \dfrac{\partial w_+}{\partial z_+} = -\dfrac{\partial P_+}{\partial z_+} + F_z + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\left(\dfrac{\partial^2 w_+}{\partial x_+^2} + \dfrac{\partial^2 w_+}{\partial y_+^2} + \dfrac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2}\right), \\ \dfrac{\partial u_+}{\partial x_+} + \dfrac{\partial v_+}{\partial y_+} + \dfrac{\partial w_+}{\partial z_+} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$y = 0: \quad u_+ = w_+ = 0, \; v_+ = V_0; \tag{2}$$

$$y = \delta: \quad \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\frac{\partial u_+}{\partial x_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - 2\frac{\partial v_+}{\partial y_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} - \left(\frac{\partial v_+}{\partial x_+} + \frac{\partial u_+}{\partial y_+}\right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+}\left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+}\right)\right] +$$

$$+ M\frac{\partial \delta_+}{\partial x_+} + N\left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 w_+}{\partial x_+ \partial z_+}\right) + \tau_x = 0; \tag{3}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[2\frac{\partial w_+}{\partial z_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - 2\frac{\partial v_+}{\partial y_+}\frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} - \left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+}\right) + \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+}\left(\frac{\partial u_+}{\partial z_+} + \frac{\partial w_+}{\partial x_+}\right)\right] +$$

$$+ M\frac{\partial \delta_+}{\partial z_+} + N\left(\frac{\partial^2 w_+}{\partial z_+^2} + \frac{\partial^2 u_+}{\partial x_+ \partial z_+}\right) + \tau_z = 0; \tag{4}$$

$$P_+ = \frac{2}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial v_+}{\partial y_+} - \frac{\partial \delta_+}{\partial x_+}\left(\frac{\partial u_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial x_+}\right) - \frac{\partial \delta_+}{\partial z_+}\left(\frac{\partial w_+}{\partial y_+} + \frac{\partial v_+}{\partial z_+}\right)\right] - \sigma_+\left(\frac{\partial^2 \delta_+}{\partial x_+^2} + \frac{\partial^2 \delta_+}{\partial z_+^2}\right) +$$

$$+ P_0 - \mathrm{sign}\,\Delta T \frac{\dfrac{\rho_1}{\rho_2} - 1}{\left(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ku}\right)^2}\frac{1}{\delta^2}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t_+} = v_+ - u_+\frac{\partial \delta}{\partial x_+} - w_+\frac{\partial \delta}{\partial z_+} + \frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ku}}\frac{1}{\delta}. \tag{6}$$

Безразмерные величины в (1–6): $u_+ = \dfrac{u}{u_0}$, $v_+ = \dfrac{v}{u_0}$, $w_+ = \dfrac{w}{u_0}$ – проекции скорости на соответствующие оси координат; $t_+ = \dfrac{tu_0}{\delta_0}$ – время; $x_+ = \dfrac{x}{\delta_0}$, $y_+ = \dfrac{y}{\delta_0}$, $z_+ = \dfrac{z}{\delta_0}$ – переменные; $\delta_+ = \dfrac{\delta}{\delta_0}$ – толщина жидкой пленки;

$\mathrm{Re} = \dfrac{u_0\delta_0\rho}{\mu}$ – число Рейнольдса; $F_x = \dfrac{g_x\delta_0}{u_0^2}$, $F_y = -\dfrac{g_y\delta_0}{u_0^2}$, $F_z = \dfrac{g_z\delta_0}{u_0^2}$ – проекции числа Фруда на соответствующие оси координат; $P_+ = \dfrac{P}{\rho u_0^2}$ – давление; $N = \dfrac{k+e}{\rho\delta_0^2 u_0}$ – параметр поверхностной вязкости; $\overline{\tau}_x = \dfrac{\tau_x}{\rho u_0^2}$, $\overline{\tau}_z = \dfrac{\tau_z}{\rho u_0^2}$ – проекции касательного напряжения; $M = M_T + M_K$ – параметр Марангони: $M_T = \dfrac{\partial\sigma}{\partial T^0}\left(\dfrac{\partial T^0}{\partial y}\right)_{y=\delta}\dfrac{1}{\rho u_0^2}$, $M_K = \dfrac{\partial\sigma}{\partial K}\dfrac{\partial K}{\partial\delta}\dfrac{1}{\rho u_0^2}$; $\mathrm{Pr} = \dfrac{\rho c_p \upsilon}{\lambda}$ – число Прандтля; $\mathrm{Ku} = \dfrac{r'}{c_p\Delta T}$ – число фазового перехода; $\sigma_+ = \dfrac{\sigma}{\rho u_0^2\delta_0}$ – параметр поверхностного натяжения. Здесь u_0 – средняя скорость основного течения жидкой пленки, δ_0 – толщина пленки в невозмущенном состоянии. В процессе конденсации $\operatorname{sign}\Delta T = 1$, а в процессе испарения $\operatorname{sign}\Delta T = -1$.

Поверхностное натяжение зависит от температуры и концентрации веществ на свободной поверхности жидкой пленки. Градиенты температуры и концентрации вызывают неоднородность поверхностного натяжения, что приводит к возникновению на межфазной поверхности, например, термокапиллярных сил. Согласно эффекту Марангони поверхностный слой приходит в движение и вовлекает в него близлежащие приповерхностные слои. Идея о существовании внутри пленки потоков жидкости с противоположным направлением циркуляции во впадинах и под гребнями была высказана П.Л. Капицей [5]. Циркуляционные потоки благодаря создаваемому ими дополнительному перемешиванию значительно интенсифицируют процесс переноса вещества и тепла через жидкую пленку. Интенсификация в жидких пленках процессов тепло- и массообмена связана с повышением эффективности, экологической безопасности и надежности пленочных аппаратов.

Поставленная задача (1)–(6) решена методами возмущений [4] и выведено дисперсионное уравнение:

$$\omega\left(a_7k_x + a_9k_z + i\right) + a_1k_x^4 + a_2k_x^2k_z^2 + a_3k_z^4 - a_4ik_x^3 - a_5ik_z^3 - -a_6k_x^2 - a_8k_xk_z -$$
$$-a_{10}k_z^2 + a_{11}ik_x + a_{12}ik_z - \frac{1}{\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ku}} = 0, \qquad (7)$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$, k_Σ – волновой вектор, направленный под углом α к оси OX: $k_\Sigma = \sqrt{k_x^2 + k_z^2}$, $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{k_z}{k_x}$.

Коэффициенты дисперсионного уравнения (7) имеют вид:

$$a_1 = -\frac{\mathrm{Re}\,\sigma}{3},\ a_2 = 2a_1,\ a_3 = a_1,\ a_4 = -\frac{\mathrm{Re}^2 F_x N}{2},\ a_5 = -\frac{\mathrm{Re}^2 F_z N}{2},\ a_6 = a_6^* + a_6^1,$$

$$a_6^* = -\frac{\mathrm{Re}\,F_y}{3} - \frac{\mathrm{Re}\,M}{2} + \frac{3}{40}\mathrm{Re}^3 F_x\left(\tau_x + F_x\right),\ a_6^1 = \frac{2}{3}\mathrm{Re}\cdot\mathrm{sign}\,\Delta T\,\frac{C}{\left(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ku}\right)^2},$$

$$a_7 = \frac{5}{24}\mathrm{Re}^2 F_x,\ a_8 = \frac{3}{20}\mathrm{Re}^3 F_x F_z + \frac{3}{40}\mathrm{Re}^3\left(F_z\tau_x + F_x\tau_z\right),\ a_9 = \frac{5}{24}\mathrm{Re}^2 F_z,$$

$$a_{10} = a_{10}^* + a_{10}^1,\ a_{10}^* = -\frac{\mathrm{Re}\,F_y}{3} - \frac{\mathrm{Re}\,M}{2} + \frac{3}{40}\mathrm{Re}^3 F_z\left(\tau_z + F_z\right),$$

$$a_{10}^1 = \frac{2}{3}\mathrm{Re}\cdot\mathrm{sign}\,\Delta T\,\frac{C}{\left(\mathrm{Re}\cdot\mathrm{Pr}\cdot\mathrm{Ku}\right)^2},\ a_{11} = -\mathrm{Re}\,F_x - \mathrm{Re}\,\tau_x,\ a_{12} = -\mathrm{Re}\,F_z - \mathrm{Re}\,\tau_z.$$

Уравнение (7) позволяет рассчитать волновые характеристики: ω_r – частоту, ω_i – инкремент, фазовую скорость $c_r = \frac{\omega_r}{k}$ для диапазона чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 20$.

Вычислительные эксперименты по влиянию неустойчивости Марангони (параметр $M > 0$) на волновые характеристики проведены для вертикальной пленки воды. В этом случае проекции числа Фруда равны:

$$F_x = \frac{3}{\mathrm{Re}} - \frac{3}{2}\tau_x,\quad F_y = 0.$$

Поверхностное натяжение связано с числом Рейнольдса зависимостью $\sigma = 4887\,\mathrm{Re}^{-\frac{5}{3}}$.

На рис. 1, 2 представлены инкремент ω_i и фазовая скорость c_r. При неустойчивости Марангони для всего исследуемого диапазона чисел Рейнольдса заметно увеличивается величина инкремента и уменьшается фазовая скорость по сравнению с соответствующими их величинами (рис. 3, 4) при свободном стекании пленки, когда $M = 0$.

При неустойчивости Марангони область неустойчивого течения пленки жидкости расширяется по диапазону волновых чисел для исследуемых чисел Рейнольдса $\mathrm{Re} \le 20$ (рис. 5). В области неустойчивости определено положение кривых, соответствующих максимальному значению инкремента. Волновым числам, принадлежащим гармоникам максимального инкремента, соответствует минимальное значение фазовой скорости. Режимы течения пленок жидкости с максимальным значением инкремента реализуются в экспериментах [2].

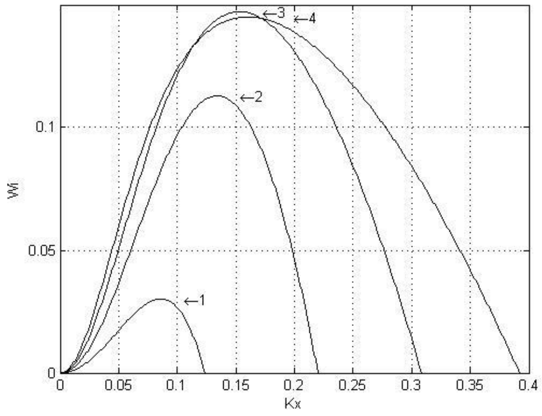

Рис. 1. Зависимость инкремента от волнового числа при М=1:
1-Re=5, 2–10, 3–15, 4–20

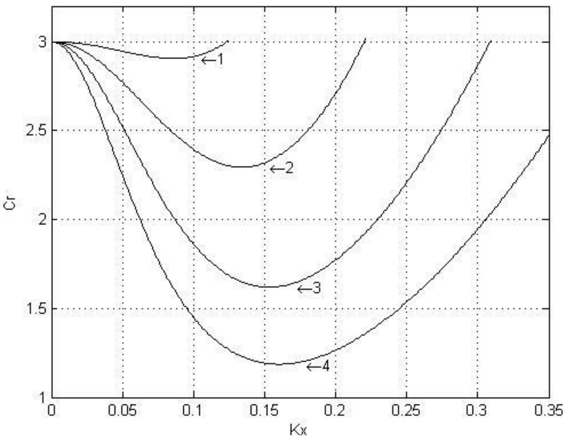

Рис. 2. Фазовая скорость при М=1:
1-Re=5, 2–10, 3–15, 4–20

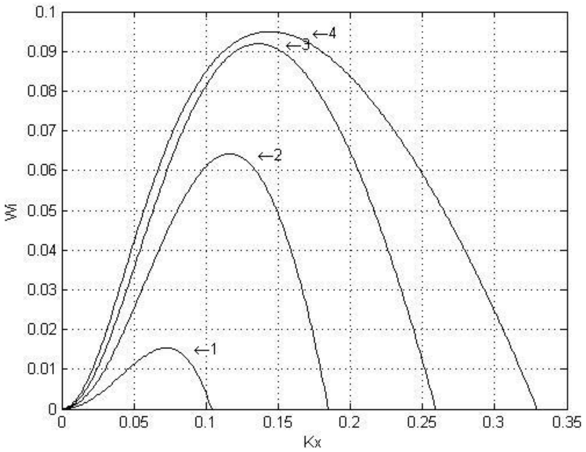

Рис. 3. Зависимость инкремента от волнового числа при М=0:
1-Re=5, 2–10, 3–15, 4–20

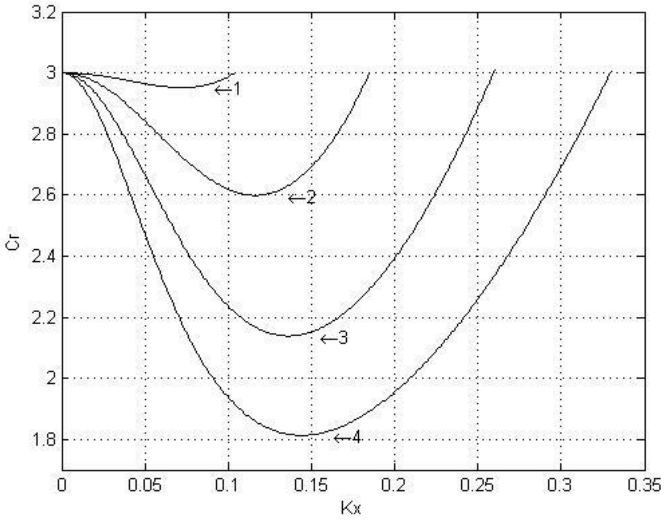

Рис. 4. Фазовая скорость при M=1:
1-Re=5, 2–10, 3–15, 4–20

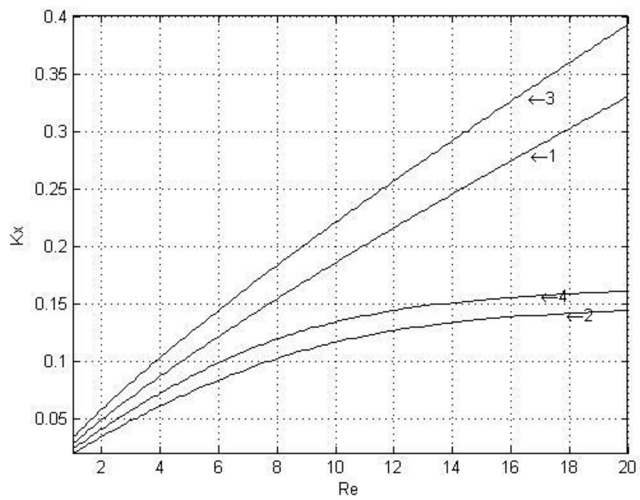

Рис. 5. Область неустойчивости:
кривые нейтральной устойчивости: 1-M=0, 3-M=1;
кривые максимального инкремента: 2-M=0, 4-M=1

При значительных градиентах температуры в жидких пленках происходит заметное снижение фазовой скорости и межфазная неустойчивость приводит к разрушению пленок. Зависимость для критических значений параметра Марангони, при которых происходит разрыв жидкой пленки, приведена в работе [3]. В представленных экспериментах по расчету волновых характеристик жидкой пленки значения параметра Марангони принималось меньше их критических значений для каждого числа Рейнольдса.

Библиографический список

1. Холпанов, Л.П. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов. – М.: Наука, 1990. – 271 с.

2. Алексеенко, С.В. Волновое течение пленок жидкости / С.В. Алексеенко, В.Е. Накоряков, Б.Г. Покусаев. – М.: Наука, 1992. – 256 с.

3. Прокудина, Л.А. Неустойчивость неизотермической жидкой пленки / Л.А. Прокудина, Г.П. Вяткин // Доклады РАН. – 1998.– Т. 362, № 6. – С. 770–772.

4. Прокудина, Л.А. Влияние неоднородности поверхностного натяжения на волновое течение жидкой пленки / Л.А. Прокудина // Инженерно-физический журнал. – 2014. – Т. 87, № 1. – С. 158–166.

5. Капица, П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости / П.Л. Капица // ЖЭТФ. – 1948. – Т. 18, Вып. 1. – С. 3–28.