УДК 621.791.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн

Основной целью работы является совершенствование метода расчета температурных полей в детали под действием поверхностных тепловых источников при условии, что теплофизические коэффициенты суть функции температуры.

Ключевые слова: теплофизические коэффициенты, устойчивость, теплопроводность, температура.

Определение температуры на поверхности и в глубине детали от действия наружного источника теплоты является ответственным этапом при разработке и установлении технологических параметров процессов восстановления деталей машин (наплавки, термообработки), а также при проектировании и изготовлении установок.

В работе [1] было замечено, что «учет зависимости коэффициентов теплофизических свойств металла и теплоотдачи от температуры приводит к линейным дифференциальным уравнениям процесса и к нелинейным граничным условиям, и ведет к невозможности получения расчетных уравнений процесса аналитическими методами». Учитывая вышесказанное и рекомендации по решению подобных задач [1, 2, 3], в настоящей работе задача определения температурного поля решена численным методом, при этом предложена и обоснована явная устойчивая численная схема для уравнения теплопроводности, основанная на комбинации явной и неявной схемы с использованием линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

В технической литературе отмечается, что для расчета температуры при сварке стальных деталей рекомендуется принимать теплофизические коэффициенты соответствующие средней температуре 400–500°, иногда 700–800° [1, 2, 3]. Целью данной работы является оценка таких рекомендаций. Для достижения цели выведены соответствующие расчетные формулы и разработана программа расчета на языке программирования С++ и проведены численные эксперименты.

Для стержня длины L уравнение одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами записывается в виде [4]:

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(q\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Здесь x – продольная координата, отсчитываемая от левого конца, t – время, $u = u(x,t)$ – температура. Будем считать удельную теплоемкость единицы объема c и коэффициент теплопроводности q функциями температуры, т. е. $c = c(u)$ и $q = q(u)$.

Краевые условия на концах стержня выглядят так:

$$-\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0} = \lambda_l(u(0,t))\big(\theta_l - u(0,t)\big) + Q_l, \tag{2}$$

$$\left(q(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L} = \lambda_r(u(0,t))\big(\theta_r - u(0,t)\big) + Q_r, \tag{3}$$

где $\lambda_l(u)$ и $\lambda_r(u)$ – коэффициенты теплоотдачи соответственно на левом и правом конце стержня (известные функции температуры), θ_l и θ_r – температура внешней среды соответственно на левом и правом конце стержня, Q_l и Q_r – мощность теплоисточника, соответственно, на левом и правом конце стержня.

Кроме того, задано распределение температуры на стержне в начальный момент времени $t = 0$:

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{4}$$

Записывая вместе уравнение (1), краевые условия (2), (3) и начальное условие (4), получим постановку третьей смешанной задачи одномерной теплопроводности с непостоянными коэффициентами, являющимися функциями температуры:

$$\begin{cases} c(u)\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \quad t>0, 0<x<L, \\ u(x,0)=\varphi(x), \\ -\left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=\lambda_l(u(0,t))\big(\theta_l-u(0,t)\big)+Q_l, \\ \left(q(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=L}=\lambda_r(u(0,t))\big(\theta_r-u(0,t)\big)+Q_r. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение [4, 5, 6] функцию $G(u)=\int\limits_0^u q(\xi)d\xi$.

Для функции G получаем вместо (1) уравнение:

$$\frac{\partial G}{\partial t}=a^2(u)\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}, \text{ где } a^2(u)=\frac{q(u)}{c(u)}.$$

Для расчета значений функции G можно воспользоваться разностной схемой [4, 7], где отношение приращения значения функции к шагу по времени в узле i заменяется производной по времени:

$$\frac{dG_i(t)}{dt}=a^2(u_i)\frac{G_{i-1}(t)-2G_i(t)+G_{i+1}(t)}{h^2}, \; t\in[0;\tau], \; i=2,\dots,N-1.$$

Затем уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{dG_i(t)}{dt}+\frac{2a^2(u_i)}{h^2}G_i(t)=\frac{a^2(u_i)}{h^2}\big(G_{i-1}(0)+G_{i+1}(0)\big).$$

Расчетная формула для значений функции G во внутренних узлах сетки запишется в виде [4]:

$$G_i(t)=G_i e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}t}+\left(1-e^{-\frac{2a^2(u_i)}{h^2}t}\right)\frac{G_{i-1}+G_{i+1}}{2}, \; i=2,\dots,N-1.$$

Заведем фиктивные узлы с номерами 0 и $N+1$ и подберем значения G_0 и G_{N+1} в этих узлах так, чтобы обеспечить выполнение условий (2)–(3).

Перепишем краевое условие (2) в виде:

$$-\frac{\partial G}{\partial x}\bigg|_{x=0}=\lambda_l(u(0,t))\big(\theta_l-u(0,t)\big)+Q_l.$$

Обозначим через G^{-1} функцию, обратную к функции G. В силу монотонности последней такая функция существует. Тогда $u(0,t)$ можно записать в виде:

$$u(0,t)=G^{-1}(G(u(0,t)))=G^{-1}(G(0,t))$$

и

$$-\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=\lambda_l(G^{-1}(G(0,t)))\left(\theta_l-G^{-1}(G(0,t))\right)+Q_l.$$

Аппроксимируя производную $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}$ разделенной разностью $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=0}=\frac{G_1-G_0}{h}$, а значение $G(0,t)$ – полусуммой $G(0,t)=\frac{G_0+G_1}{2}$, получим, что краевое условие (2) запишется в виде:

$$-\frac{2G_1}{h}+\frac{2}{h}\cdot G\left(G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)=\lambda_l\left(G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)\left(\theta_i-G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)\right)+Q_l.$$

Обозначив $z=G^{-1}\left(\frac{G_0+G_1}{2}\right)$, получим уравнение относительно z:

$$\frac{2}{h}\cdot G(z)-\lambda_l(z)(\theta_l-z)=\frac{2G_1}{h}+Q_l.$$

На основе вышеприведенной теории разработано программное обеспечение расчета температурного поля. Ниже приведены исходные (геометрические, технологические и тепловые) параметры процесса для численных экспериментов (постоянные параметры): число элементарных участков (N = 100), шаг по времени (dt = 0,001 сек), длина стержня в метрах (L = 0,02), плотность мощности теплоисточника слева (Q_l = 10000 дж/сек/кв.м).

Библиографический список

1. Рыкалин, Н.Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н.Н. Рыкалин. – М.: Машгиз, 1951. – 296 с.

2. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов / В.М. Вержбицкий. – М.: Высшая школа, 2002. – 847 с.

3. Самарский, А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

4. Геренштейн, А.В. Устойчивые явные схемы для уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн, Н. Машрабов // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2008. – Вып. 1. – № 15 (115). – С. 9–11.

5. Геренштейн, А.В. Явная разностная схема решения одномерного квазилинейного уравнения теплопроводности / А.В. Геренштейн, М.З. Хайрисламов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2013. – Т. 5. – № 1. – С. 12–17.

6. Хайрисламов, М.З. Явная схема решения третьей смешанной задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности / М.З. Хайрисламов, А.В. Геренштейн // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, механика, физика». – 2013. – Т. 5. – № 2. – С. 174–177.

7. Машрабов Н. Моделирование тепловых полей при наплавке, термической и механической обработке металлов / Н. Машрабов, А.В. Геренштейн, Е.А. Геренштейн // Инжиниринг, инновации, инвестиции: сборник научных трудов / Рос. союз науч. и инженер. обществ. орг., Междунар. акад. авторов науч. открытий и изобретений, Регион. отд-ние; ред. В.В. Ерофеев. – Челябинск, 2013. – С. 41–45.