УДК 533.6.011.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА АВТОМОДЕЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ О ДИНАМИЧЕСКОМ СЖАТИИ ХОЛОДНОГО ГАЗОВОГО ШАРА

В.Ф. Куропатенко, Е.С. Шестаковская, М.Н. Якимова

Рассмотрено решение задачи о динамическом сжатии холодного газового шара, находящегося в сферическом сосуде с непроницаемой стенкой. Под действием зависящего от времени наружного давления стенка движется с отрицательной скоростью. В отличие от решений Я.М. Каждана, К.В. Брушлинского [1] и Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшица [2] коэффициент автомодельности определяется с помощью закона сохранения массы. Такой метод позволяет для каждого заданного показателя адиабаты найти единственный показатель автомодельности.

Ключевые слова: автомодельная сферическая ударная волна, показатель автомодельности, законы сохранения, идеальный газ.

Автомодельная задача о динамическом сжатии холодного газового шара относится к классу задач, из постановки которых нельзя определить группу подобия. Показатель автомодельности, который и задает группу подобия, определяется в процессе решения задачи, что в этом случае и составляет основную трудность.

Некоторые результаты, относящиеся к этой задаче, рассмотрены в книге К.П.Станюковича [3]. Так же задача о схождении волны при γ=1,4 приведена в работе Г. Гудерлея [4].

1. Переход к автомодельным переменным

В качестве исходных возьмём уравнение неразрывности, уравнение движения и следствие из трёх законов сохранения – сохранение энтропии вдоль траектории:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2\rho u}{r}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial r}=0. \tag{3}$$

Уравнение состояния идеального газа возьмём в виде:

$$P=f(s)\rho^{\gamma} \tag{4}$$

Уравнения (1)–(4) – описывают одномерные адиабатические течения идеального газа со сферической симметрией. Из (1)–(4) следует уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial r}-\frac{\gamma P}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)=0. \tag{5}$$

Из (1) и (5) следует уравнение:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial r}-\gamma P\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}\right)=0. \tag{6}$$

Система уравнений (1), (2), (6) содержит P, ρ, u. Перейдём к переменным t и ξ, где:

$$\xi=\frac{r}{b(a-t)^{n}}. \tag{7}$$

Запишем уравнения перехода от переменных t, r к переменным t, ξ для произвольной функции f(t, r) переходящей в функцию f(t, ξ, (t, r)).

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_r=\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\xi+\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_t\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_r, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_t=\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)_t\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial r}\right)_r. \tag{9}$$

Производные ξ (7) по t и r имеют вид:

$$\frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{n\xi}{a-t},\qquad \frac{\partial\xi}{\partial r}=\frac{1}{b(a-t)^{n}}. \tag{10}$$

Уравнения (1), (2), (6) в переменных t, ξ принимают вид:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{\xi}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\right)\frac{n\xi}{a-t}+u\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{1}{b(a-t)^{n}}+\rho\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{1}{b(a-t)^{n}}+\frac{2\rho u}{\xi b(a-t)^{n}}=0, \tag{11}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{\xi}+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{t}\frac{n\xi}{a-t}+u\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{t}\frac{1}{b(a-t)^{n}}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{t}\frac{1}{b(a-t)^{n}}=0, \tag{12}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)_{\xi}+\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{t}\frac{n\xi}{a-t}+\left(\frac{\partial P}{\partial\xi}\right)_{t}\cdot\frac{u}{b(a-t)^{n}}+\frac{\gamma P}{b(a-t)^{n}}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)_{t}+\frac{2u}{\xi}\right)=0. \tag{13}$$

Будем искать решение системы (11)-(13) в виде:

$$P=\alpha_{p}(t)\Pi(\xi),\ \ \rho=\alpha_{\rho}(t)\delta(\xi),\ \ u=\alpha_{u}(t)M(\xi). \tag{14}$$

Используя соображения размерностей, будем считать, что:

$$\alpha_{p}=\alpha_{\rho}\alpha_{u}^{2}. \tag{15}$$

2. Постановка задачи о сжатии газового шара. В момент t_0 в области $0\le r\le r_0$ находится холодный идеальный газ с параметрами $\rho_0=\mathrm{const},\ P_0=0,\ E_0=0,\ u_0=0.$ В точке $t=t_0,\ r=r_0$ задана скорость $u_1<0$ и следовательно в ней находится сильный разрыв. При $t>t_0$ из этой точки в газ станет распространяться ударная волна со скоростью $D<0$. Законы сохранения на фронте сильной ударной волны в идеальном газе имеют вид:

$$\rho_{+}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_{0}, \tag{16}$$

$$D=\frac{\gamma+1}{2}u_{+}, \tag{17}$$

$$P_{+}=\frac{\gamma+1}{2}\rho_{0}u_{+}^{2}. \tag{18}$$

Будем считать, что на ударной волне $\xi = 1$. Следовательно, $\delta(\xi), M(\xi), \Pi(\xi)$ на ударной волне постояны.

Из (16) видно, что на сильной ударной волне $\rho_+ = \mathrm{const}$. В соответствии с (14) $\rho=\alpha_{\rho}(t)\delta(\xi)$. Если потребовать, чтобы $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$ были бы инвариантны относительно начальных данных задачи ρ_0 и u_1, то следует принять:

$$\alpha_{\rho}=\rho_{0},\quad \delta_{1}=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \tag{19}$$

В точке $t=t_0,\ r=r_0,\ \xi=1$ из (7) следует:

$$b = \frac{r_0}{\left(a - t_0\right)^n}. \tag{20}$$

Подставив значение b в (7), получим выражение для безразмерной координаты ξ:

$$\xi = \frac{r}{r_0}\left(\frac{a - t_0}{a - t}\right)^n. \tag{21}$$

Уравнение (21) при $\xi = 1$ определяет траекторию фронта ударной волны:

$$r = r_0\left(\frac{a - t}{a - t_0}\right)^n. \tag{22}$$

В момент фокусировки ударной волны t_f её координата становится равной нулю. Из (22) при $r = 0$ и $t = t_f$ следует при $n > 0$:

$$a = t_f.$$

Таким образом:

$$\xi = \frac{r}{r_0}\left(\frac{t_f - t_0}{t_f - t}\right)^n, \tag{23}$$

3. Скорость ударной волны и время фокусировки. Скорость ударной волны определяется дифференцированием (22)

$$D = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0}\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1}. \tag{24}$$

Из (24) и (17) следует зависимость u_+ от t:

$$u_+ = -\frac{2r_0 n}{\left(\gamma + 1\right)\left(t_f - t_0\right)} \cdot \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1}. \tag{25}$$

При $t=t_0$ из (24) и (25) следуют выражения для D_1 и u_1:

$$D_1 = -\frac{r_0 n}{t_f - t_0}, \quad u_1 = -\frac{2r_0 n}{\left(\gamma + 1\right)\left(t_f - t_0\right)}. \tag{26}$$

Запишем (24) и (25) с помощью (26) в виде:

$$D = D_1\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1}, \tag{27}$$

$$u_+ = \frac{2}{\gamma + 1} D_1\left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0}\right)^{n-1}. \tag{28}$$

Подставим выражение скорости (28) на фронте ударной волны в уравнение (14). Из условия независимости $M(\xi)$ от начальных параметров задачи r_0, t_0, u_1, D_1 следует:

$$M = \frac{2}{\gamma+1}, \tag{29}$$

$$\alpha_u = D_1 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{n-1}. \tag{30}$$

Совершенно аналогично подставив u_+ (28) и $P = \alpha_p \cdot \Pi$ из (14) в (18), получим:

$$\alpha_p(t)\Pi_1 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_0 D_1^2 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{2(n-1)}. \tag{31}$$

Из условия независимости Π_1 от начальных данных задачи следует:

$$\alpha_p(t) = \rho_0 D_1^2 \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{2(n-1)}, \tag{32}$$

$$\Pi_1 = \frac{2}{\gamma+1}. \tag{33}$$

Значения δ_1, M_1, Π_1 - это значения, заданные на границе области в точке ξ=1.

Из (27) выразим t_f через заданные значения r_0, t_0, u_1 è γ и показатель автомодельности n:

$$t_f = t_0 - \frac{2r_0 n}{(\gamma+1)u_1}. \tag{34}$$

Значение n пока не известно.

4. Уравнения для безразмерных величин. В результате преобразований система уравнений (11)-(13) сводится к следующим выражениям для M', Π', δ':

$$M' = \frac{(n-1)\xi\big(\delta M(M-\xi) - 2\Pi\big) - 2\gamma M \Pi n}{n\xi\big(\gamma\Pi - (M-\xi)^2\delta\big)}. \tag{35}$$

$$\Pi' = \frac{\delta\Pi\big[(n-1)\xi\big(2(M-\xi) - \gamma M\big) + 2\gamma M(M-\xi)n\big]}{n\xi\big(\gamma\Pi - (M-\xi)^2\delta\big)}, \tag{36}$$

$$\delta' = \frac{\delta\left[2M\delta n\left(M-\xi\right)^2-\left(n-1\right)\xi\left(\delta M\left(M-\xi\right)-2\Pi\right)\right]}{n\xi\left(M-\xi\right)\left(\gamma\Pi-\left(M-\xi\right)^2\delta\right)}. \tag{37}$$

Функции $\delta(\xi)$, $\Pi(\xi)$, $M(\xi)$ находятся путём интегрирования уравнений (35)–(37) в области $1<\xi<\infty$. Начальные условия при $\delta=1$ таковы:

$$\text{ï ðè}\ \ \xi=1 \quad \Pi_1=\frac{2}{\gamma+1}, \quad \delta_1=\frac{\gamma+1}{\gamma-1}, \quad M_1=\frac{2}{\gamma+1}, \tag{38}$$

$$M_1'=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{3(1-n)}{n}-\frac{4\gamma}{\gamma+1}\right), \quad \Pi_1=\frac{2}{\gamma^2-1}\left(\frac{1-n}{n}2\cdot(2\gamma-1)-\frac{4\gamma(\gamma-1)}{\gamma+1}\right), \tag{39}$$

$$\delta_1'=\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)}\left(\frac{1-n}{n}\frac{6}{\gamma-1}-\frac{4}{\gamma+1}\right). \tag{40}$$

В результате интегрирования уравнений (35)–(37) определяются зависимости $M(\xi)$, $\Pi(\xi)$, $\delta(\xi)$. Для интегрирования системы (35)–(37) нужно задать значение n. Оно зависит от γ. Зависимость $n(\gamma)$ в явном виде отсутствует. Её нужно найти.

5. Определение коэффициента автомодельности

Объём газового шара в момент t_0 равен:

$$\theta_0=\frac{4}{3}\pi r_0^3. \tag{41}$$

При $t>t_0$ масса газа в объёме θ_0 возрастает. В некоторый момент времени $t_*>t_0$ масса газа в объёме θ_0 равна:

$$m_{\text{À}}=\frac{4}{3}\pi\rho_0 r_{\text{óâ}}^3+4\pi\int\limits_{r_{\text{óâ}}}^{r_0}\rho(r)r^2dr. \tag{42}$$

На ударной волне ξ=1 и из выражения для ξ (23) следует при $t=t_*$

$$r_{\text{óâ}}=r_0\left(\frac{t_f-t_*}{t_f-t_0}\right)^n, \quad dr=r_0\left(\frac{t_f-t_*}{t_f-t_0}\right)^n d\xi. \tag{43}$$

После перехода к переменным t и ξ и подстановки (14), (19), (23) и (43) в (42) получим:

$$m_A=4\pi\rho_0\left(\frac{t_f-t_*}{t_f-t_0}\right)^{3n} r_0^3\left(\frac{1}{3}+\int\limits_1^{\xi_*}\delta\xi^2d\xi\right). \tag{44}$$

На поверхности с $r=r_0$ величина ξ_* связана с t_* уравнением, следующим из (23):

$$\xi_* = \left(\frac{t_f - t_*}{t_f - t_0} \right)^{-n}. \tag{45}$$

Таким образом, выражение m_A приобретает вид:

$$m_A = 4\pi r_0^3 \rho_0 \xi_*^{-3} \left(\frac{1}{3} + \int_1^{\xi_*} \delta \xi^2 d\xi \right). \tag{46}$$

С другой стороны, масса m_A должна быть равна сумме начальной массы и массы, которая за время $t_* - t_0$ втечёт в объём θ_0:

$$m_B = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \rho_0 - \int_{t_0}^{t_*} 4\pi r_0^2 \rho u dt, \tag{47}$$

где u<0. При $r = r_0$ из (23) следует:

$$\xi = \left(\frac{t_f - t}{t_f - t_0} \right)^{-n}, \qquad dt = \left(t_f - t_0\right) \xi^{-\left(\frac{n+1}{n}\right)} \frac{1}{n} d\xi. \tag{48}$$

После подстановки (14), (34) и (48) в (47) получаем:

$$m_B = 4\pi r_0^3 \rho_0 \left(\frac{1}{3} + \int_1^{\xi_*} \delta M \xi^{-2} d\xi \right). \tag{49}$$

Зависимости $\delta(\xi)$ è $M(\xi)$ определяются уравнениями (35)–(37). Величина t_* задаётся произвольно в промежутке $\left(t_0, t_{\text{ô}}\right)$. Величины ρ_0, r_0, t_0, γ è u_1 заданы при постановке задачи. Значение ξ_* (45) преобразуем с помощью (34) к виду:

$$\xi_* = \left(1 + \frac{(\gamma + 1) u_1}{2 r_0 n} \left(t_* - t_0\right) \right)^{-n}. \tag{50}$$

Таким образом, чтобы найти n, нужно решить уравнение:

$$Y(n) = m_A\left(n, t_*\right) - m_B\left(n, t_*\right) = 0. \tag{51}$$

При вычислении интегралов в выражениях m_A (46) и m_B (49) используются производные M', δ', Π' (35)–(37). При этом может оказаться две возможности:

1) на промежутке $1 \le \xi \le \xi_*$ знаменатель в ноль не обращается;

2) знаменатель в (35)–(37) обращается в ноль при некотором значении ξ.

В первом случае значение n является корнем уравнения (51). Если значение n, при котором вычисляются m_A и m_B, является лишь приближенным значением корня, то $Y \neq 0$. Итерации ведутся до тех пор, пока станет $Y = 0$.

Во втором случае одновременно со знаменателем в (35)–(37) должны обращаться в ноль и числители, т.к. производные M', δ', Π' конечны. Если n задано приближенно, то в точке, где знаменатель обращается в ноль, в качестве $Y(n)$ берется сумма числителей в (35)–(37). Итерации по n ведутся до тех пор, пока станет $Y = 0$.

Результаты расчета приведены в таблице:

Таблица

γ	1,2	1,4	1,667	1,87	2	2,5	2,75	3
n	0,757142	0,717175	0,688838	0,674154	0,667046	0,644039	0,635949	0,629393

Работа выполнена при поддержке РФФИ. Грант 13-01-00072.

Библиографический список

1. Брушлинский, К.В. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики / К.В. Брушлинский, Я.М. Каждан // Успехи математических наук. – 1963. – Т. 18, Вып. 2. – С. 3–23.

2. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Изд-во Наука, 1986. – 736 с.

3. Станюкович, К.П. Неустановившиеся движения сплошной среды / К.П. Станюкович. – М.: Гостехиздат, 1971. – 856 с.

4. Guderley, G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstösse in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse / G. Guderley // Luftfahrtforschuhg 19. – 1942. – № 9.

К содержанию