УДК 532.529

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГАЗОВЗВЕСИ С ХИМИЧЕСКИМИ ПРЕВРАЩЕНИЯМИ, ИНВАРИАНТНАЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Ю.М. Ковалев, Е.Е. Пигасов

В данной работе предложена математическая модель, описывающая переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ-твердые частицы, инвариантная относительно преобразования Галилея. Проведенный анализ существующих математических моделей, описывающих переход горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ-твердые частицы, показал, что они не являются инвариантными относительно преобразования Галилея. Были подробно изучены причины, приводящие законы сохранения к не инвариантности относительно преобразования Галилея, которые были устранены в математической модели перехода горения во взрыв твердого унитарного топлива в двухфазной гетерогенной среде: газ-твердые частицы, предложенной в работе.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь, гетерогенная среда**.**

Введение

Отсутствие в природе чистых веществ требует активного развития математических моделей гетерогенных сред, достоверно описывающих изучаемые процессы. Данные математические модели находят широкое применение в различных отраслях науки и техники.

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов.

В настоящее время на практике ослабление УВ в газе осуществляется путем применения различных экранирующих систем в виде сплошных, перфорированных и разрушающихся перемычек. Один из основных недостатков сплошных и перфорированных перемычек состоит в их весьма большой материалоемкости и соответственно большой величине объемного содержания α твердого конденсированного вещества ($\alpha \approx 1 \div 0{,}1$). Указанный недостаток в меньшей степени относится к перемычкам, разрушающимся при взаимодействии с УВ и образующим экранирующие слои или завесы из пены или аэровзвесей [1], . Поэтому с особой остротой встает проблема разработка математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], адекватных тем физическим процессам, которые они пытаются описывать. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [3, 4]. Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была адекватна изучаемому физическому процессу [5, 6].

Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея математических моделей аэровзвеси [7, 8], активно применяемых для математического моделирования перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, показал, что они не являются инвариантными относительно преобразования Галилея [9, 10]. Поэтому в данной работе был проведен анализ причин, приводящих к не инвариантности относительно преобразования Галилея, и предложен подход к построению математической модели перехода конвективного горения унитарного твердого топлива во взрыв, инвариантной относительно преобразования Галилея.

3. Математическая модель газовзвеси

Рассмотрим одномерный плоский случай математической модели течения газа с твердыми частицами (аэровзвесь), которая описывается системой уравнений сохранения [11], и проведем оценку ее на инвариантность относительно преобразования Галилея.

Система уравнений сохранения двухфазной аэровзвеси [11] без химических превращений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n v_2}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

$$\rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} - nR, \qquad \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = nR, \tag{1.2}$$

$$\rho_1 \frac{d_1 e_1}{dt} = \frac{p\alpha_1}{(\overset{\circ}{\rho}_1)} \frac{d_1 \overset{\circ}{\rho}_1}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \tag{1.3}$$

$$\rho_2 \frac{d_2 e_2}{dt} = \frac{p\alpha_2}{(\overset{\circ}{\rho}_2)} \frac{d_2 \overset{\circ}{\rho}_2}{dt} + nq \tag{1.4}$$

$$p = p_1(\overset{\circ}{\rho}_1, T_1) = p_2(\overset{\circ}{\rho}_2, T_2), \quad e_1 = e_1(\overset{\circ}{\rho}_1, T_1), \quad e_2 = e_2(\overset{\circ}{\rho}_2, T_2),$$

$$\rho_1 = \overset{\circ}{\rho}_1 \alpha_1, \qquad \rho_2 = \overset{\circ}{\rho}_2 \alpha_2, \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad E_i = e_i + \frac{v_i^2}{2} (i = 1, 2).$$

Здесь индексы 1, 2 относятся соответственно к газу и частицам; $\overset{\circ}{\rho}_i, \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ – истинные плотности и объемные содержания фаз; $\rho_i, v_i, T_i, e_i, E_i$ – парциальная плотность, скорость, температура, внутренняя и полная энергия i-ой фазы; p – давление, n – число частиц в единице объема смеси. Уравнения (1) – уравнения неразрывности газа и частиц и уравнение сохранения числа частиц в единице объема смеси; (2) – уравнения импульса газа и частиц; (3) и (4) – уравнения сохранения внутренней энергии газа и частиц.

Получим уравнения сохранения кинетической энергии газовой и конденсированной фаз.

Умножая уравнение сохранения импульса газовой фазы на v_1, а уравнение сохранения импульса конденсированной фазы на v_2, получим уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц соответственно:

$$v_1 \left[\frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1^2}{\partial x} \right] = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1,$$

$$v_2 \left[\frac{\partial \rho_2 v_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2^2}{\partial x} \right] = nRv_2,$$

которые после простых преобразований принимают следующий вид:

$$\frac{\partial \rho_1 \frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 v_1 \frac{v_1^2}{2}}{\partial x} = -v_1 \frac{\partial p}{\partial x} - nRv_1, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \rho_2 \frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 v_2 \frac{v_2^2}{2}}{\partial x} = nRv_2. \tag{1.6}$$

Проведем анализ инвариантности относительно преобразования Галилея уравнений сохранения (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6).

Запишем уравнения (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6) в новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D. Скорости в новой системе координат будут равны:

$$v_{1\text{н}} = v_1 + D, \tag{1.7}$$

$$v_{2\text{н}} = v_2 + D. \tag{1.8}$$

Координата будет определяться из уравнения:

$$x_\text{н} = x + Dt. \tag{1.9}$$

Производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_\text{н}}, \tag{1.10}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial x_\text{н}}\right) D. \tag{1.11}$$

Легко показать [9, 10], что уравнения (1.1), (1.2), (1.5) и (1.6) инвариантны относительно преобразования Галилея.

Преобразуем левые части уравнений сохранения внутренней энергии газа и частиц. С учетом равенств (1.1) они могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = \frac{p\alpha_1}{(\overset{\circ}{\rho}_1)} \frac{d_1 \overset{\circ}{\rho}_1}{dt} + nR(v_1 - v_2) - nq, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = \frac{p\alpha_2}{(\overset{\circ}{\rho}_2)} \frac{d_2 \overset{\circ}{\rho}_2}{dt} + nq. \tag{1.13}$$

Из уравнений неразрывности газовой и конденсированной фаз (1.1) легко получить следующие равенства:

$$\alpha_1 \frac{d_1 \overset{\circ}{\rho}_1}{dt} = -\overset{\circ}{\rho}_1 \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\right),$$

$$\alpha_2 \frac{d_2 \overset{\circ}{\rho}_2}{dt} = -\overset{\circ}{\rho}_2 \left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\right).$$

Подставляя данные выражения в уравнения (1.12) и (1.13) соответственно, получим:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x} = -p\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\right) + nR(v_1 - v_2) - nq, \tag{1.14}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x} = -p\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\right) + nq. \tag{1.15}$$

Очевидно, что уравнения сохранения внутренней энергии газовой (1.3) и конденсированной (1.4) фаз, преобразованные к виду (1.14) и (1.15), инвариантны относительно преобразования Галилея.

Получим уравнение сохранения полной энергии смеси. Для этого суммируем левые и правые части уравнений (1.5), (1.6), (1.14), (1.15). В результате получим:

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)p]=-\alpha_2(v_1-v_2)\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (1.16)$$

которое не совпадает с уравнением сохранения полной энергии смеси, полученным в работе [7,11]. Для того, чтобы убрать это несоответствие, необходимо разделить силу взаимодействия между фазами R на две части [12]: на составляющую из-за воздействия макроскопического поля давлений – $\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}$, которая не связана со скоростной неравновесностью между фазами, и составляющую f, которая связана с несовпадением скоростей:

$$nR=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf.$$

Подставляя полученное выражение в равенства (1.2) и преобразовывая левые части этих равенств к дивергентному виду, получим:

$$\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1^2}{\partial x}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf\ , \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2^2}{\partial x}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf, \qquad (1.18)$$

К системе уравнений (1.1), (1.17) и (1.18) добавляются уравнения сохранения внутренней и кинетической энергии:

$$\frac{\partial\rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_1 v_1}{\partial x}\right)+nf(v_1-v_2)-nq, \qquad (1.19)$$

$$\frac{\partial\rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial\alpha_2 v_2}{\partial x}\right)+nq, \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial\rho_1\frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_1 v_1\frac{\partial p}{\partial x}-nfv_1, \qquad (1.21)$$

$$\frac{\partial\rho_2\frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_2 v_2\frac{\partial p}{\partial x}+nfv_2. \qquad (1.22)$$

В этом случае уравнение сохранения полной энергии смеси будет иметь вид, совпадающий с предлагаемым в работе в [7, 11]:

$$\frac{\partial(\rho_1 E_1+\rho_2 E_2)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[\rho_1 v_1 E_1+\rho_2 v_2 E_2+(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)p]=0. \qquad (1.23)$$

Легко показать, что уравнения (1.17)–(1.23) инвариантны относительно преобразования относительно Галилея [9, 10].

4. Математическая модель газовзвеси с химическими превраще-

ниями

В результате проведенного анализа была уточнена математическая модель, описывающая поведение газовзвесей. Полагая далее возможность химического превращения в конденсированной фазе, запишем законы сохранения в следующем виде [11]:

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial x}=nJ,\qquad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial x}=-nJ,\qquad \frac{\partial n}{\partial t}+\frac{\partial n v_2}{\partial x}=\psi, \tag{2.1}$$

$$\rho_1\frac{d_1 v_1}{dt}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf+nJ(v_*-v_1)\ , \tag{2.2}$$

$$\rho_2\frac{d_2 v_2}{dt}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf-nJ(v_*-v_2), \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered}\rho_1\frac{d_1 e_1}{dt}=\frac{p\alpha_1}{(\overset{\circ}{\rho}_1)}\frac{d_1\overset{\circ}{\rho}_1}{dt}+nf(v_1-v_2)-\\ -nq+nJ\frac{(v_*-v_1)^2}{2}+nJ(i_*-i_1),\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\rho_2\frac{d_2 e_2}{dt}=\frac{p\alpha_2}{(\overset{\circ}{\rho}_2)}\frac{d_2\overset{\circ}{\rho}_2}{dt}+nq-nJ\frac{(v_*-v_2)^2}{2}-nJ(i_*-i_2). \tag{2.5}$$

Здесь J характеризует интенсивность химического превращения, i_* – энтальпия. С помощью уравнений (2.1) приведем правые части уравнений сохранения импульса газа (2.2) и частиц (2.3) к дивергентному виду. В результате простых преобразований получим законы сохранения импульса газа и частиц в виде:

$$\frac{\partial\rho_1 v_1}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1^2}{\partial x}=-\alpha_1\frac{\partial p}{\partial x}-nf+nJv_*\ , \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial\rho_2 v_2}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2^2}{\partial x}=-\alpha_2\frac{\partial p}{\partial x}+nf-nJv_*. \tag{2.7}$$

С помощью уравнений (2.1) и уравнений сохранения импульса газа (2.6) и частиц (2.7) очень просто получаются уравнения сохранения кинетической энергии газа и частиц в виде:

$$\frac{\partial\rho_1\frac{{v_1}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_1 v_1\frac{v_1^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_1 v_1\frac{\partial p}{\partial x}-nfv_1+nJv_*v_1-nJ\frac{v_1^2}{2}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial\rho_2\frac{{v_2}^2}{2}}{\partial t}+\frac{\partial\rho_2 v_2\frac{v_2^2}{2}}{\partial x}=-\alpha_2 v_2\frac{\partial p}{\partial x}+nfv_2-nJv_*v_2+nJ\frac{v_2^2}{2}. \tag{2.9}$$

С помощью уравнений (2.1) приведем правые части уравнений сохранения внутренней энергии газа (2.4) и частиц (2.5) к дивергентному виду. В результате простых преобразований получим законы сохранения импульса газа и частиц в виде:

$$\frac{\partial \rho_1 e_1}{\partial t}+\frac{\partial \rho_1 e_1 v_1}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_1 v_1}{\partial x}\right)-nq+ \\ +nf(v_1-v_2)+nJ\frac{(v_*-v_1)^2}{2}+nJi_*, \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial \rho_2 e_2}{\partial t}+\frac{\partial \rho_2 e_2 v_2}{\partial x}=-p\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial \alpha_2 v_2}{\partial x}\right)+ \\ +nq-nJ\frac{(v_*-v_2)^2}{2}+nJi_*. \tag{2.11}$$

Не представляет труда показать, что система уравнений (2.1), (2.6)–(2.11) инвариантна относительно преобразования Галилея [9]. Суммируя левые и правые части уравнений сохранения кинетической энергии газа (2.8) и частиц (2.9) с левыми и правыми частями уравнений сохранения внутренней энергии газа (2.10) и частиц (2.11) соответственно получим уравнение сохранения полной энергии смеси (1.23).

Замыкая систему уравнений (2.1), (2.6), (2.7), (2.10) и (2.11) уравнениями состояния газа и частиц:

$$e_1=c_p(T_1-T_0)-\frac{p}{\overset{\circ}{\rho}_1},\quad p=\frac{\overset{\circ}{\rho}_1 R_1 T_1}{1-\beta\overset{\circ}{\rho}_1}, \tag{2.12}$$

$$e_2=c_2(T_2-T_0)+Q^\circ-\frac{p}{\overset{\circ}{\rho}_2},\quad i_i=e_i+\frac{p}{\overset{\circ}{\rho}_i}, \tag{2.13}$$

а так же соотношениями, описывающими интенсивность силового, теплового и химического взаимодействия между фазами:

$$f=\pi d^2\overset{\circ}{\rho}_1 C_d(v_1-v_2)|v_1-v_2|/8, \tag{2.14}$$

$$q=\pi d\lambda_1 Nu(T_1-T_2),\qquad J=\pi d^2\overset{\circ}{\rho}_2 u_s\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\varphi}, \tag{2.15}$$

получаем замкнутую математическую модель для описания перехода горения газовзвеси во взрыв, инвариантную относительно преобразования Галилея. Здесь T_i – температура; Q° – теплота химической реакции при $T_2 = T_0, p = p_0$; p – давление, β – ковольюм; c_p и c_2 – теплоемкости фаз; λ_1 – теплопроводность газовой фазы; R_1 – универсальная газовая постоянная; C_d и Nu – коэффициент трения и число Нуссельта, определяемые числами Рейнольдса (Re) и Прандтля (Pr) относительного движения фаз; d – диаметр частиц, u_s и φ – эмпирические константы, характеризующие скорость горения топлива.

Авторы выражают свою благодарность профессору В.Ф.Куропатенко за полезные обсуждения и интерес к работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 13 – 01 – 00072.

Библиографический список

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М Ковалев, А.Ю Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.

2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84, № 1. – С. 74–92.

3. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.

4. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.

5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.

6. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2012. – №27. – С. 69–73.

7. Вайнштейн, П.Б. Нестационарные задачи горения аэровзвесей унитарного топлива / П.Б. Вайнштейн, Р.И. Нигматулин, В.В. Попов, Х.А. Рахматулин // Известия АН СССР, Серия «Механика жидкости и газа». – 1981. – Вып. 3. – С. 39–43.

8. Baer, M.F. Two-Phase Mixture Theory for the Deflagration-to-Detonation Transition (DDT) in Reactive Granular Materials / M.F. Baer, J. Nunziato // Int. J. Multiphase Flow. – 1986. – Vol. 12. – pp. 861–889.

9. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея двухфазных математических моделей гетерогенных сред / Ю.М. Ковалев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2014. – Т. 6, № 1. – С. 30–35.

10. Ковалев, Ю.М. Математический анализ уравнения сохранения двухфазных смесей / Ю.М. Ковалев, Е.А. Ковалева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 2. – С. 29–37.

11. Ивандаев, А.И. Газовая динамика многофазных сред. Ударные и детонационные волны в газовзвесях / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Р.И. Нигматулин // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. – М.: ВИНИТИ. – 1981. – Т. 16. – С. 209–287.

12. Нигматулин, Р.И. Основы механики гетерогенных сред / Р.И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.