

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ «ЗАМОРОЖЕННОЙ» ГАЗОВЗВЕСИ

Н.Л. Клиначева

Проведен анализ инвариантности относительно преобразования Галилея широко применяемой математической модели «замороженной» газовзвеси. Показано, что уравнения этой модели не являются инвариантными относительно преобразования Галилея (G. Galilei), что приводит к появлению в уравнении энергии фиктивного источникового члена. Дополнительный рост энтропии ведет к нарушению второго закона термодинамики. В данной работе предложена модификация модели «замороженной» газовзвеси, приводящая к её инвариантности относительно преобразования Галилея. Проведены расчёты и сделаны сравнения с неинвариантной моделью.

Ключевые слова: математическая модель, инвариантность, многокомпонентная смесь

Перспективное использование взрывных процессов в ряде отраслей современной техники тесно связано с решением вопросов обеспечения мер безопасности, защиты инженерных сооружений и технологического оборудования от действия ударных волн (УВ). В связи с этим важное прикладное значение представляет изучение проблемы локализации механических эффектов взрыва и ослабления УВ с помощью математического моделирования данных физических процессов [1]. Поэтому с особой остротой встает проблема как разработки математических моделей многокомпонентных гетерогенных сред [2], основанных на гипотезе взаимопроникающих взаимодействующих континуумов [3], так и анализа уже существ-

вующих математических моделей [4, 5]. Развитие современной вычислительной техники позволило значительно усложнить математические модели физических процессов, используемых в науке и технике. В связи с этим повысился статус математического моделирования как источника получения информации о процессах. Более того, для быстропротекающих процессов есть такие проблемы, когда математическое моделирование является единственным средством предварительного изучения явлений [6, 7].

Для верификации расчетов, с одной стороны, используют известные экспериментальные данные, а с другой стороны, при анализе проведенных измерений используют математические модели. Очень важно, чтобы условия проведения расчетов и экспериментов совпадали, а математическая модель была инвариантна относительно преобразования Галилея.

В работах [4, 5] проведен анализ математической модели «замороженной» газовзвеси [8], которая активно используется при анализе затухания УВ в гетерогенных средах. Оказалось, что неинвариантность относительно преобразования Галилея уравнений из [8] приводит к появлению дополнительного источника энергии, связанного с движением системы координат. Этот источник энергии не имеет физической природы и приводит к нарушению второго закона термодинамики.

В настоящей работе предложена модификация изложенной в [8] математической модели «замороженной» газовзвеси, проведены расчёты затухания УВ в системе защитных решёток и приведено сравнение с результатами из [8].

Постановка задачи. При решении задачи ослабления УВ с помощью аэровзвеси, как правило, предполагается, что частицы твёрдого компонента неподвижны и несжимаемы. Это означает, что вместо газовзвеси фактически рассматривается заполненная газом недеформируемая решётка. Твёрдые частицы имитируют ее узлы, а связи между узлами решетки не оказывают влияния на газодинамическое течение, т.е. используется модель «замороженной» газовзвеси, представленная в работах [5, 6] при изучении ослабления УВ. Поскольку частицы неподвижны и несжимаемы, то их объёмная концентрация α и, следовательно, объёмная концентрация газа $1-\alpha$ постоянны.

Для определения эффекта ослабления УВ с помощью решётки в [8] рассмотрена двухкомпонентная среда. Поведение газа (величины без индексов) в смеси описывается уравнениями:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$(1 - \alpha)\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = -F, \quad (2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} = -\frac{Q}{(1 - \alpha)}, \quad (3)$$

где ρ – плотность, u – скорость, e и E – удельная внутренняя и удельная полная энергия, F – сила компонентного взаимодействия, Q – интенсивность теплообмена. Уравнения (1)-(3) дополняются выражением для полной энергии:

$$E = e + \frac{1}{2}u^2, \quad (4)$$

и уравнением состояния:

$$P = (\gamma - 1)\rho e. \quad (5)$$

с $\gamma = 1.4$. Материалы решётки (индекс g) описывается уравнениями:

$$\rho_g = \text{const}, \quad u_g = 0, \quad P_g = P, \quad \alpha \rho_g \frac{\partial e_g}{\partial t} = Q. \quad (6)$$

Субстанциональная производная определяется уравнением

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}.$$

Начальные данные задачи формулируются аналогично [8]. При $t=0$ смесь воздух-железо находится в области $x_1 \leq x \leq x_2$ в нормальных условиях $P_0=0,1$ МПа, $\rho_0=1,21$ кг/м³, $\rho_g=7800$ кг/м³, $u_g=0$, $T=300^\circ\text{K}$.

Граница $x=x_1$ является контактной границей между чистым газом и смесью с $\alpha > 0$. В момент $t=0$ на эту контактную границу вышла УВ, на фронте которой давление $P_+=2$ МПа. Все остальные величины на фронте находятся из условий Гюгонио $\rho_+=5,631$ кг/м³, $e_+=0,88794$ МДж/кг, $u_+=1,110333$ км/с, $E_+=0,70516$ МДж/кг. Таким образом, на поверхности $x=x_1$ образовался произвольный разрыв (слева – газ, справа – смесь). При $t > 0$ он распадается с образованием УВ, прошедшей в смесь. и отражённой ударной волны.

В области $0 \leq x \leq x_2$ в момент $t=0$ задана волна разрежения с линейным профилем скорости

$$u = u_+ \left(\frac{x}{x_1} \right).$$

Остальные величины определяются уравнениями

$$C = C_+ - \frac{\gamma - 1}{2} u_+ \left(1 - \frac{x}{x_1} \right),$$

$$\rho = \rho_+ \left(\frac{C}{C_+} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}, \quad e = e_+ \left(\frac{C}{C_+} \right)^2, \quad P = (\gamma - 1)\rho e.$$

При $t \geq 0$ на правой границе $x=x_2$ задано условие $u=0$, на левой границе при $x=0$ условие свободного протекания газа.

Анализ модели [8]. Следуя [2], выпишем уравнение производства энтропии в модели (1)-(3). Для этого из уравнения энергии (3) исключим с помощью уравнения движения (2) кинетическую энергию, а производную $\frac{\partial u}{\partial x}$ заменим производной $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$ с помощью уравнения (1). В результате получим:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + P \frac{dV}{dt} = \frac{1}{\rho(1-\alpha)} \left(uF - Q + \alpha u \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (7)$$

где $V=1/\rho$. Сравним уравнение (7), которое является следствием уравнений (1)-(3), с уравнением для удельной внутренней энергии газа:

$$\frac{de}{dt} + P \frac{dV}{dt} = T \frac{dS}{dt}, \quad (8)$$

где T – температура, S – энтропия. Из (7) и (8) следует, что энтропия газа при его движении между частицами решётки изменяется согласно уравнению:

$$T \frac{dS}{dt} = -\frac{Q}{\rho(1-\alpha)} + \frac{u}{\rho(1-\alpha)} \left(F + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (9)$$

Если решётка отсутствует, то $\alpha=0$, $F=0$, $Q=0$ и энтропия остаётся постоянной вдоль траекторий частиц газа. Однако, если $\alpha>0$, то газ дополнительно разогревается из-за работы $\frac{u}{\rho(1-\alpha)} \left(F + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right)$ причём этот член таков, что при $\alpha \rightarrow 1$ $\frac{dS}{dt} \rightarrow \infty$, т.е. газ испытывает тепловой взрыв. Из уравнения (9) также следует, что обмен импульсом и тепловой энергией в модели (1)–(3) абсолютно необратимы.

Проведем анализ инвариантности системы уравнений (1)-(3) относительно преобразования Галилея. С этой целью перейдем в новую систему координат, которая движется с постоянной скоростью D . При этом скорость и координата изменятся так:

$$u_H = u + D, \quad x_H = x + Dt.$$

Производные по координате и времени определяются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_H}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_H + \left(\frac{\partial}{\partial x_H} \right) D.$$

После перехода в движущуюся систему координат значок H будем опускать. Функция F и Q не изменяются при переходе в новую систему координат.

Легко проверить, что уравнения (1) и (2) для газа инвариантны к преобразованию Галилея, уравнение (2) для решётки неинвариантно и должно быть заменено уравнением:

$$\frac{d_g u_g}{dt} = 0. \quad (10)$$

Рассмотрим далее уравнение (3) для газа. В новой системе координат, движущейся с постоянной скоростью D , уравнение (3) имеет вид:

$$\rho \frac{dE}{dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} + \frac{Q}{(1-\alpha)} = \omega, \quad (11)$$

где:

$$\omega = \frac{u - D}{(1 - \alpha)} \left(F + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right). \quad (12)$$

Проделав с уравнением (11) преобразования, аналогичные преобразованиям в неподвижной системе координат, получим уравнение производства энтропии:

$$T \frac{dS}{dt} = -\frac{Q}{\rho(1 - \alpha)} + \frac{u - D}{\rho(1 - \alpha)} \left(F + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (13)$$

Из сравнения уравнений (9) и (13) видно, что вторые слагаемые в правых частях зависят от выбора системы координат, т.е. от D . Иными словами, уравнения энергии (3) не инвариантно к преобразованию Галилея. Если разделить энтропию на две части:

$$S = S_{PH} + S_G,$$

где S_{PH} – определяется «физикой» модели, а S_G определяется Галилеевой не инвариантностью, то мы получим дополнительное уравнение производства энтропии:

$$T \frac{dS_G}{dt} = \frac{u - D}{\rho(1 - \alpha)} \left(F + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (14)$$

возникшее исключительно из-за того, что авторы модели [8] пренебрегли фундаментальными принципами механики.

Модификация модели [8]. Обратим внимание, что поскольку в смеси $\alpha = \text{const}$, то согласно [2] множители $(1 - \alpha)$ перед производной скорости по времени в (2) и $1/(1 - \alpha)$ перед функцией теплообмена в (3) должны отсутствовать. Кроме того, в уравнении движения (2) действует сила межкомпонентного взаимодействия F , а в уравнении энергии (3) работа этой силы отсутствует, что является одной из причин неинвариантности уравнения энергии (3) к преобразованию Галилея. С учётом этих замечаний уравнения движения и энергии газа запишем в виде:

$$\rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial P}{\partial x} = -F, \quad (15)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} + \frac{\partial Pu}{\partial x} = -Q - Fu, \quad (16)$$

Проделав все необходимые преобразования при переходе в систему координат, движущуюся с постоянной скоростью D , получим, что модель смеси, в которой поведение газа определяется уравнениями (1), (15), (16), инвариантна к преобразованию Галилея, а её уравнение производства энтропии имеет вид:

$$T \frac{dS}{dt} = -\frac{Q}{\rho}. \quad (17)$$

Уравнение (17) согласуется со вторым законом термодинамики. Видим, что производство энтропии газовой фазы определяется только межфазным теплообменом.

К сожалению, принцип инвариантности к преобразованию Галилея не выполняется в ряде моделей многокомпонентных сред, публикуемых в журналах. Такие модели не способны прогнозировать результаты тех физических процессов, для моделирования которых они предназначены.

Сравнение двух моделей. Исследуем механическое воздействие УВ на стенку преграды в зависимости от концентрации конденсированного материала в решётках и размеров их узлов. Анализ механического воздействия УВ на стенку преграды проведем с помощью модели «замороженной» газозвеси из [8] и модернизированной модели, в которой поведение газа определяется уравнениями (1), (4)–(6), (15), (16). Выражения для интенсивности «внешнего» силового и теплового взаимодействия газа с решеткой, задаются с учетом стесненности узлов [8], следующим образом:

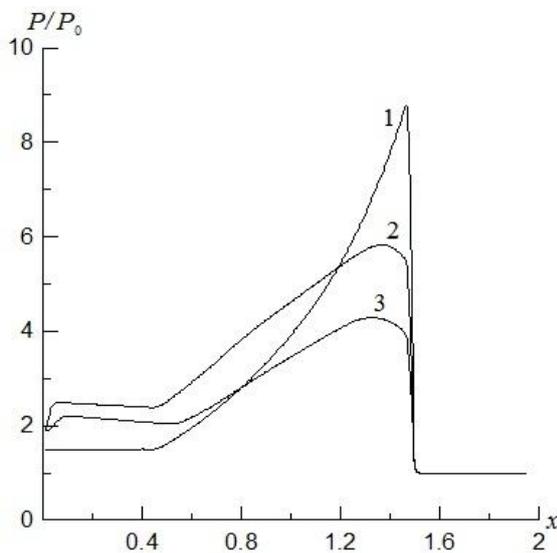


Рис. 1.

цифрой 2 – для математической модели «замороженной» газозвеси работы [8], цифрой 3 – для модифицированной математической модели.

Сравнение зависимостей 2 и 3 показывает, что добавка работы сил межкомпонентного взаимодействия в уравнение энергии газовой фазы, приводит к более значительному затуханию УВ, чем в рамках математической модели «замороженной» газозвеси работы [8].

На рис. 2 и рис. 3 представлены профили безразмерной энтропийной функции, когда УВ находится в точках $x=1,0$ м и $x=1,5$ м соответственно. Кривая 1 относится к математической модели «замороженной» газозвеси работы [8], а кривая 2 – к модифицированной модели. Видно, что модифицированная математическая модель «замороженной» газозвеси действительно описывает изоэнтропическое течение газовой фазы за УВ в отличие от модели «замороженной» газозвеси работы [8].

Поскольку интенсивность УВ в расчетах, проведенных в рамках модели работы [8], падает значительно медленнее, чем в рамках модифицированной математической модели, то и импульс передаваемый на стенку будет больше. Это подтверждено на рис. 4, где представлены профили импульса, передаваемого стенке, в зависимости от диаметра частиц.

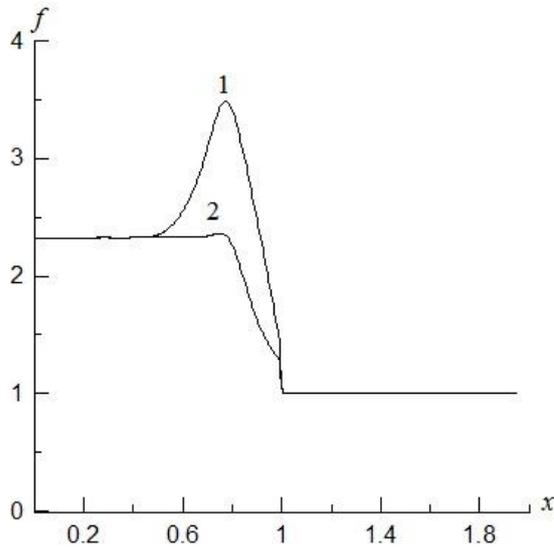


Рис.2

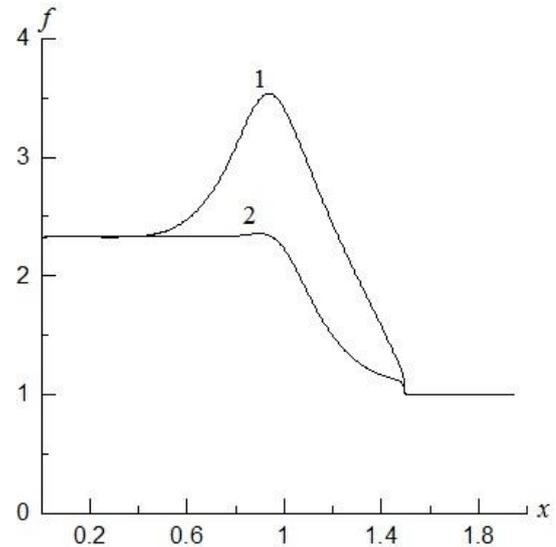


Рис.3

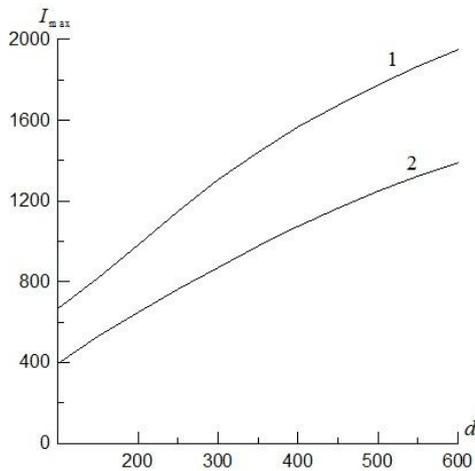


Рис. 4

Заключение 1. Проведенный в работе анализ показал, что предложенная в [8] модель смеси уравнения (1)–(6) не является инвариантной относительно преобразования Галилея и, следовательно, расчеты, проведенные методом крупных частиц, который использует эту модель не являются достоверными.

2. Предложенная в работе модифицированная математическая модель «замороженной» газозвеси (уравнения (1), (4)–(6), (15), (16)) является инвариантной относительно преобразования Галилея.

3. Результаты взаимодействия ударной волны с решёткой, полученная по этим моделям, существенно различаются.

Библиографический список

1. Ковалев, Ю.М. Ослабление воздушных ударных волн системой решеток / Ю.М. Ковалев, А.Ю. Черемохов // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Математическое моделирование физических процессов». – 1997. – Вып. 3. – С. 39–43.
2. Куропатенко, В.Ф. Новые модели механики сплошных сред / В.Ф. Куропатенко // Инженерно-физический журнал. – 2011. – Т. 84. – № 1. – С. 74–92.
3. Рахматуллин, Х.А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред / Х.А. Рахматуллин // ПММ. – 1956. – Т. 20. – Вып. 27. – С. 184–195.
4. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности некоторых математических моделей многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 6. – № 11(270). – С. 4–7.
5. Ковалев, Ю.М. Анализ инвариантности относительно преобразования Галилея некоторых моделей математических многокомпонентных сред / Ю.М. Ковалев, В.Ф. Куропатенко // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 27. – С. 69–73.
6. Гришин, А.М. Экспериментальное исследование воздействия взрыва конденсированных ВВ на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Доклады Академии наук. – 1989. – Т. 308, № 5. – С. 1074–1078.
7. Гришин, А.М. Экспериментальное и теоретическое исследование взаимодействия взрыва на фронт верхового лесного пожара / А.М. Гришин, Ю.М. Ковалев // Физика горения и взрыва. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 72–79.
8. Кругликов, Б.С. Ослабление воздушных ударных волн экранирующими решётками / Б.С. Кругликов, А.Г. Кутушев // ФГВ. – 1988. – № 1. – С. 115–117.
9. Белоцерковский, О.М., Метод крупных частиц в газовой динамике / О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов – М.: Наука, 1982.
10. Ивандаев А.И., Численное исследование нестационарных волновых течений газозвесей с выделением границ двухфазных областей и контактных разрывов в несущем газе / А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев // Численные методы в механике сплошных сред. – 1983. – Т. 14, № 6. – С. 47–60.

[К содержанию](#)