УДК517.9

ОБ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ МОДЕЛИ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

О.А. Рузакова, Е.А. Золотарёва

Получены необходимые и достаточные условия управляемости начально-конечной задачи для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной, с относительно *p*-ограниченным оператором в правой части.

Ключевые слова: относительно *p*-ограниченные операторы, начально-конечная задача, управляемость.

Уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной:

$$(\lambda - \Delta)v_t = \alpha\Delta v + f\,, \tag{1}$$

моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1]. Здесь α и λ – вещественные параметры, характеризующие среду; параметр $\alpha \in R_+$, а параметр λ может принимать и отрицательные значения, которые не противоречат физическому смыслу задачи [2], функция $f = f(x)$ играет роль внешней нагрузки. Кроме того, уравнение (1) описывает течение жидкостей второго порядка [3], процесс теплопроводности с «двумя температурами» [4], процесс влагопереноса в почве [5].

В подходящих функциональных пространствах уравнение (1) редуцируется к начально-конечной задаче:

$$P_{in}(x(0)-x_0)=0, \quad P_{fin}(x(\tau)-x_\tau)=0 \tag{2}$$

для линейного уравнения соболевского типа:

$$L\dot{x}(t)=Mx(t)+Bu(t), \tag{3}$$

где X,Y – банаховы пространства, оператор $L\in\mathbf{L}(X;Y)$ (т.е. линеен и непрерывен), оператор $M\in Cl(X;Y)$ (т.е. линеен, замкнут и плотно определен), оператор $B\in\mathbf{L}(U;Y),$ функция управления $u(\cdot):[0,\tau)\subset R_+\to U,$ U – банахово пространство, $\tau\in\mathrm{R}_+,$ $x_0,x_\tau\in X.$

Задача (2) для линейных уравнений соболевского типа впервые появилась в работах Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной [6], в дальнейшем данная задача была названа «начально-конечной» и в настоящее время активно развивается теория многоточечных начально-конечных задач для уравнений соболевского типа, см. например, [7]. Нас будет интересовать вопрос ε-управляемости начально-конечной задачи (2) для уравнения (3) (и как следствие, для уравнения (1)), т.е. возможность приведения траектории решения в наперед заданную точку [8].

Приведем необходимые вспомогательные результаты, взятые из [9]–[10]. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbf{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathbf{L}(X;Y)\}$ и L-спектр $\sigma^L(M)=\mathbf{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M. Пусть оператор M (L,p)-ограничен (терминология и результаты см. [10]) и относительный спектр оператора M $\sigma^L(M)=\sigma^L_{in}(M)\cup\sigma^L_{fin}(M),$ причем $\sigma^L_{in}(M)\cap\sigma^L_{fin}(M)=\varnothing.$

Операторы:

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu, \qquad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu \quad -$$

проекторы, $P\in\mathbf{L}(X),$ $Q\in\mathbf{L}(Y).$ Здесь $\Gamma\subset\mathbf{C}$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L(M);$ $R^L_\mu(M)=(\mu L-M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu(M)=L(\mu L-M)^{-1}$ левая L-резольвенты оператора M.

Положим $X^0(Y^0)=\ker P(\ker Q),$ $X^1(Y^1)=\mathrm{im}P(\mathrm{im}Q)$ и через $L_k(M_k)$ обозначим сужение оператора $L(M)$ на $X^k(\mathrm{dom}M\cap X^k), k=0,1.$ Из существования проекторов следует, что $X=X^0\oplus X^1,$ $Y=Y^0\oplus Y^1.$

Аналогично построим проекторы:

$$P_{in}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu, \quad P_{fin}=P-P_{in},$$

где контур $\gamma\subset\mathbf{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L_{in}(M).$

Теорема 1. *Пусть* $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{fin}(M)$, *причем* $\sigma^L_{in}(M)$ *содержится в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbf{C}$ *с кусочно гладкой границей* $\partial\Omega$ *и* $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \varnothing$, *оператор* M (L,p)*-ограничен. Тогда:*

(i) *существуют проекторы* $P_{in} \in \boldsymbol{L}(X)$ *и* $Q_{in} \in \boldsymbol{L}(Y)$ *такие, что операторы* $L \in \boldsymbol{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \boldsymbol{L}(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$, $M \in \boldsymbol{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \boldsymbol{L}(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$;

(ii) $L_0 \in \boldsymbol{L}(X^0, Y^0)$, $\quad L_{in(fin)} \in \boldsymbol{L}(X^1_{in(fin)}, Y^1_{in(fin)})$;

(iii) $M_0 \in Cl(X^0, Y^0)$, $\quad M_{in(fin)} \in \boldsymbol{L}(X^1_{in(fin)}, Y^1_{in(fin)})$;

(iv) *существуют операторы* $L^{-1}_{in(fin)} \in \boldsymbol{L}(Y^1_{in(fin)}, X^1_{in(fin)})$ *и* $M_0^{-1} \in \boldsymbol{L}(Y^0, X^0)$.

Теорема 2. *Пусть* $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{fin}(M)$, *причем* $\sigma^L_{in}(M)$ *содержится в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbf{C}$ *с кусочно гладкой границей* $\partial\Omega$ *и* $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \varnothing$, *оператор* M (L,p)*-ограничен. Тогда для любых* $x_0, x_\tau \in X$ *и функции* $u \in C^{p+1}((0,\tau);U)$ *существует единственное решение задачи* (2),(3), *которое к тому же имеет вид:*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1}(I-Q)Bu^{(q)}(t) + X^t_{in} x_0 + \int_0^t X^{t-s}_{in} L^{-1}_{in} Q_{in} Bu(s)ds -$$
$$-X^{t-\tau}_{fin} x_0 + \int_\tau^t X^{t-s}_{fin} L^{-1}_{fin} Q_{fin} Bu(s)ds.$$

Перейдем к исследованию ε-управляемости начально-конечной задачи (2) для уравнения (3).

Определение 1. Система (2),(3) называется ε-управляемой из любой точки в любую за время T, если для любых точек $x_0, x_\tau, \tilde{x} \in X$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует управление $u \in C^{p+1}((0,\tau);U)$ такое, что решение задачи (2),(3) удовлетворяет условию $\|x(T, x_0, x_\tau, u(t)) - \tilde{x}\| \le \varepsilon$.

Действуя на уравнение (3) последовательно проекторами $I-Q, Q_{in}, Q_{fin}$ и применяя теорему 1, сведем его к эквивалентной системе из трех независимых уравнений:

$$H\dot{x}^0(t) = x^0(t) + M_0^{-1}(I-Q)Bu(t), \tag{4}$$

$$\dot{x}^1_{in}(t) = S_{in} x^1_{in}(t) + L^1_{in} Q_{in} Bu(t), \qquad P_{in}(x(0) - x_0) = 0, \tag{5}$$

$$\dot{x}^1_{fin}(t) = S_{fin} x^1_{fin}(t) + L^1_{fin} Q_{fin} Bu(t), \qquad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0. \tag{6}$$

Используя результаты и методы, изложенные в [11]-[13], получим, что имеет место теорема:

Теорема 3. *Пусть* $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{fin}(M)$, *причем* $\sigma^L_{in}(M)$ *содержится в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbf{C}$ *с кусочно гладкой границей* $\partial\Omega$ *и* $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \varnothing$, *оператор* M (L,p)*-ограничен. Тогда*

(i) *система* (4) ε*-управляема тогда и только тогда:*
$$\operatorname{span}\{\operatorname{im} H^q M_0^{-1}(I-Q)B, \quad 0 \le q \le p\} = \operatorname{dom} M_0;$$
(ii) *система* (5) ε*-управляема тогда и только тогда:*
$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} \mathrm{S}_{in}^k \mathrm{L}_{in}^{-1} Q_{in} B, \quad k \in N_0\} = X_{in};$$
(iii) *система* (6) ε*-управляема тогда и только тогда*:
$$\overline{\operatorname{span}}\{\operatorname{im} \mathrm{S}_{fin}^k \mathrm{L}_{fin}^{-1} Q_{fin} B, \quad k \in N_0\} = X_{fin}.$$

Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Рассмотрим уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной:
$$(\lambda - \Delta) v_t(x,t) = \alpha \Delta v(x,t) + u(x,t). \tag{7}$$

Для того, чтобы редуцировать уравнение (7) к уравнению (3) возьмем пространства $X = \{v \in W_2^2(\Omega) : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $Y = U = L_2(\Omega)$, операторы $L = \lambda - \Delta$, $M = \alpha\Delta$, $domM = \{v \in L_2(\Omega\} : v(x) = 0, x \in \partial\Omega\}$, $B = I$. В случае $\lambda \notin \sigma(\Delta)$ оператор L непрерывно обратим и рассматриваемый случай тривиален, поэтому считаем, что $\lambda \in \sigma(\Delta)$. Пусть $\{\varphi_k : k \in N\}$ – множество собственных значений задачи Дирихле для уравнения Лапласа, занумерованных по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in N\}$ с учетом их кратности, а $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. В работе [14] показано, что если $\alpha, \lambda \in R \setminus \{0\}$, то оператор M $(L,0)$-ограничен. L-спектр оператора M имеет вид:
$$\sigma^L(M) = \left\{ \mu_k = \frac{\alpha\lambda_k}{\lambda - \lambda_k}, \quad \mathrm{k} \in \mathrm{N} \setminus \{\mathrm{l} : \lambda_l = \lambda\} \right\}.$$

Понятно, что для такого множества можно подобрать контур $\gamma \in \mathrm{C}$, который бы удовлетворял условиям теоремы 1. Построим проекторы:
$$P_{in} = \sum_{\mu_k \in \sigma_{in}^L} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k, \qquad P_{fin} = \sum_{\mu_k \in \sigma_{fin}^L} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

Фиксируем $\tau \in R_+$ и в цилиндре $\Omega \times (0,\tau)$ рассмотрим уравнение (7), удовлетворяющее краевому условию:
$$v(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\tau), \tag{8}$$
и условиям начально-конечной задачи:
$$P_{in}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau) = 0. \tag{9}$$

Для рассматриваемой системы имеют место равенства:
$$X^0 = span\{\varphi_k : \lambda_k = \lambda\},\ X^{in} = \overline{span}\{\varphi_k : \mu_k \in \sigma_{in}^L\},\ X^{fin} = \overline{span}\{\varphi_k : \mu_k \in \sigma_{fin}^L\},$$

$$M_0^{-1} = \frac{1}{\alpha\lambda} \sum_{\lambda_k=\lambda} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k,$$

$$S_{in}^l L_{in}^{-1} = \alpha^l \sum_{\mu_k \in \sigma_{in}^L} \frac{\lambda_k^l \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)^{l+1}}, \qquad S_{fin}^l L_{fin}^{-1} = \alpha^l \sum_{\mu_k \in \sigma_{fin}^L} \frac{\lambda_k^l \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{(\lambda - \lambda_k)^{l+1}}, \quad l \in N_0.$$

Поэтому справедлива

Теорема 4. *Система* (7)–(9) ε*-управляема.*

Библиографический список

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.

2. Руткас, А.Г. Задача Коши для уравнения Коши для уравнения $Ax'(t)+Bx(t)=f(t)$ / А.Г. Руткас // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 11. – С. 1996–2010.

3. Ting, T.W. Certain Non-Steady Flows of Second-Order Fluids / T.W. Ting // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1963. – V. 14, no. 1. – Pp. 28–57.

4. Chen, P.J. On a Theory of Heat Conduction Involving Two Temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – V. 19. – Pp. 614–627.

5. Hallaire, M. On a Theory of Moisture-Transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – No. 3. – Pp. 60–72.

6. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера-Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.

7. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – Вып. 11. – № 5 (264). – С. 4–12.

8. Шолохович, Ф.А. Об управляемости линейных динамических систем / Ф.А. Шолохович // Известия УрГУ. – 1998. – № 10. Вып. 1. – С. 103–126.

9. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Tokyo; Keln: VSP, – 2003. – 216 p.

10. Загребина, С.А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С.А. Загребина // Вестник ЮУрГУ. Серия: «Математическое моделирование и программирование». – 2013. – Т. 6. № 2. – С. 5–24.

11. Федоров, В.Е. Одномерная управляемость в гильбертовых пространствах линейных уравнений соболевского типа / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 8. – С. 1137–1139.

12. Федоров, В.Е. Управляемость линейных уравнений соболевского типа с относительно *p*-радиальными операторами / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 7. – С. 54–57.

13. Федоров, В.Е. Одномерная и двумерная управляемость уравнений соболевского типа в банаховых пространствах / В.Е. Федоров, О.А. Рузакова // Мат. заметки. – 2003. – Т. 74, № 4. – С. 618–628.

14. Загребина С.А. Линейные уравнения соболевского типа с относительно *p*-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 20–34.