УДК 515.128

ОДНОРОДНЫЕ λ-МНОЖЕСТВА

С.В. Медведев

Изучаются некоторые свойства CDH-пространств. В частности, доказано, что любое h-однородное несчётное λ-пространство X гомеоморфно своему подпространству $X \setminus A$ для любого счётного множества $A \subset X$.

Ключевые слова: CDH-пространство; λ-пространство; пространство первой категории; h-однородное пространство.

Все пространства предполагаются сепарабельными метрическими.

Понятие CDH-пространства является классическим; оно встречалось ещё в работах Кантора, Брауэра, Фреше и многих других математиков прошлого века. Сепарабельное топологическое пространство X называется *счётно плотно однородным*, если для любых двух счётных всюду плотных множеств A и B из пространства X существует такой гомеоморфизм $f : X \to X$, что $f(A) = B$. Кратко такое пространство X называется *CDH-пространством.* Это понятие применяется только для сепарабельных пространств. Несложно проверить, что каждое счётное CDH-пространство всегда дискретно. Важными примерами CDH-пространств служат евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, гильбертов куб $[0;1]^\omega$ и полное пространство Эрдоша, т.е. множество точек из гильбертова пространства ℓ_2, все координаты которых являются иррациональными числами.

Следующая теорема, доказанная М. Хрусаком и З. Авилесем [1], показывает, что сравнительно просто устроенные CDH-пространства всегда гомеоморфны полным метрическим пространствам.

Теорема 1. *Любое борелевское CDH-пространство метризуемо полной метрикой*.

Из теоремы 1 следует, что поиск других CDH-пространств нужно вести среди множеств, устроенных более сложно, чем борелевские множества в польских пространствах. Ниже в теореме 2 указан ещё один класс CDH-пространств.

В некоторых моделях теории множеств (например, MA + ¬CH или модель Коуэна) можно построить аналитическое CDH-пространство, которое не метризуемо полной метрикой (см. [1] или [5]).

Куратовский (см. [2]) ввел так называемые λ-пространства. Сепарабельное пространство X называется *λ-пространством*, если любое счётное подмножество из X является G_δ-множеством в X. Можно доказать [2], что любое несчётное польское пространство содержит несчётное

λ-пространство. Отметим следующие связи между λ-пространствами и пространствами первой категории. Напомним, что пространство X называется пространством *первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств.

Лемма 1 [2]. *Любое λ-пространство является пространством первой категории.*

Лемма 2 [3]. *Любое CDH-пространство первой категории является λ-пространством.*

Теорема 2 усиливает недавний результат Хернандез-Гутиерреза, Хрусака и ван Милла [4, теорема 4.9].

Нульмерное пространство называется *h-однородным,* если любое его непустое открыто-замкнутое подмножество гомеоморфно всему пространству.

Теорема 2. *Любое h-однородное несчётное λ-пространство является CDH-пространством.*

Отметим два любопытных свойства h-однородных λ-пространств.

Теорема 3. *Пусть дано h-однородное несчётное λ-пространство X. Тогда X гомеоморфно своему подпространству $X \setminus A$ для любого счётного множества $A \subset X$.*

Доказательство. Так как пространство X нигде не счётно, то дополнение $X \setminus A$ является всюду плотным подмножеством в X. Согласно лемме 1, X – пространство первой категории. Тогда [2] дополнение $X \setminus A$ также будет пространством первой категории относительно себя.

Так как пространство X нульмерно, то существует такая последовательность $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ дискретных открытых счётных покрытий пространства X, что семейство $\mathcal{U} = \{U \in \mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ образует счётную базу пространства X, причём для любого n покрытие $\mathcal{U}_{n+1}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}_n$. По определению h-однородного пространства, для каждого множества $U \in \mathcal{U}$ существует гомеоморфизм $\varphi_U : X \to U$.

Построим счётное множество $A^* = A \cup \bigcup \{\varphi_U(A) : U \in \mathcal{U}\}$. Из определения λ-пространства следует, что A^* – множество типа G_δ в пространстве X. Несложно проверить, что $X^* = X \setminus A^*$ – всюду плотное множество типа F_σ в пространстве первой категории X; следовательно, X^* также является множеством первой категории в X. Более того, X^* – множество типа F_σ в пространстве X. Поэтому множество X^* можно представить в виде счётного объединения $X^* = \bigcup \{X_n : n \in \omega\}$ замкнутых (в X) множеств X_n. Так как пространство X нульмерно, то без ограничения общности можно считать, что множества $\{X_n : n \in \omega\}$ попарно не пересекаются. Из построения вытекает, что множество $\varphi_U(X_n)$ замкнуто и нигде не плотно в X, причём $\varphi_U(X_n) \subset U \setminus A$ для любого $U \in \mathcal{U}$ и любого n.

Применяя лемму 4 из [8], делаем вывод, что любое открытое множество из пространства $X \setminus A$ содержит нигде не плотное замкнутое (относительно $X \setminus A$) подмножество, гомеоморфное пространству X. Тогда по теореме 3 из [8] пространство $X \setminus A$ гомеоморфно h-однородному расширению $h(X, \omega)$ пространства X относительно пространств первой категории. В [8] было показано, что для любого сепарабельного h-однородного пространства X первой категории расширение $h(X, \omega)$ гомеоморфно самому пространству X. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть дано нульмерное несчётное λ-пространство X. Тогда X можно вложить в качестве замкнутого множества в некоторое h-однородное несчётное λ-пространство X*, причём мощность пространства X* равна мощности пространства X.*

Доказательство. В качестве пространства X* возьмём h-однородное расширение $h(X, \omega)$ пространства X относительно пространств первой категории, см. [6]. По определению, пространство X* содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное пространству X. Поэтому мощность пространства X* не меньше мощности пространства X. С другой стороны, пространство X* можно представить в виде счетного объединения $X^* = \bigcup\{X_n : n \in \omega\}$ замкнутых множеств X_n. Следовательно, мощность пространства X* не больше мощности пространства X. Итак, $|X^*| = |X|$.

Проверим, что X* является λ-пространством.

Так как пространство X нульмерное, то и пространство X* также нульмерное, см. [6]. Поэтому без ограничения общности можно считать, что множества $\{X_n : n \in \omega\}$ попарно не пересекаются. Несложно показать, что каждое множество X_n само является λ-пространством. Возьмём произвольное счётное множество $A \subset X^*$. Для любого n пересечение $X_n \cap A$ имеет тип G_δ относительно X_n. Значит, дополнение $X_n \setminus A$ имеет тип F_σ относительно X_n. Так как дополнение $X^* \setminus A = \bigcup\{X_n \setminus A : n \in \omega\}$ является множеством типа F_σ в X, то само множество A имеет тип G_δ в X. Теорема доказана.

Теперь опишем случаи, когда пространство не является CDH-пространством.

Теорема 5. *Если пространство X первой категории содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное канторову совершенному множеству, то X не является CDH-пространством.*

Доказательство. В пространстве X возьмём замкнутое подмножество F, гомеоморфное канторову совершенному множеству. Так как пространство X первой категории, то множество F нигде не плотно в X. Зафиксируем счётное всюду плотное в F подмножество A, гомеоморфное пространству рациональных чисел. Согласно теореме 2 из статьи [7] в пространстве X существует всюду плотное σ-дискретное множество B типа G_δ. Несложно проверить, что множество $F\setminus(A\cup B)$ гомеоморфно пространству иррациональных чисел. Следовательно, множество $F\setminus(A\cup B)$ не является множеством типа F_σ относительно F. Учитывая, что множество F замкнуто в X, делаем вывод о том, что $X\setminus(A\cup B)$ не является множеством типа F_σ относительно пространства X. Значит, объединение $A\cup B$ не является множеством типа G_δ в X. Поэтому не существует гомеоморфизма $f : X \to X$, переводящего множество B в $A\cup B$. Итак, X не является CDH-пространством. Теорема доказана.

Последнее утверждение можно усилить, если ввести следующее понятие. *Типом* счётного всюду плотного множества D из пространства X называется семейство множеств $\{f(D)$: f – гомеоморфизм пространства X на себя$\}$. Несложно убедиться, что X является CDH-пространством тогда и только тогда, когда в нем существует ровно один тип счётных всюду плотных подмножеств. В совместной работе Кунена, Медини и Здомского [5] доказано, что если пространство X удовлетворяет свойству совершенного ядра для открытых подмножеств и не обладает свойством Бэра, то в пространстве X существует континуум счётных всюду плотных множеств различных типов. Следующая теорема 6 обобщает последний результат.

Теорема 6. *Пусть в пространстве X существуют открытое подмножество U первой категории и замкнутое множество F, такие, что F гомеоморфно канторову совершенному множеству и $F \subset U$. Тогда в пространстве X существует континуум счётных всюду плотных множеств различных типов*.

Кратко рассмотрим также один из вариантов обобщения понятия CDH-пространства. С этой целью вместо счётного всюду плотного множества из пространства X возьмём произвольное всюду плотное множество.

Пространство X называется *плотно однородным относительно пространства A*, если для любых двух всюду плотных подмножеств A_1 и A_2 пространства X, каждое из которых гомеоморфно пространству A, существует такой гомеоморфизм $f : X \to X$, что $f(A_1) = A_2$. В общем случае возникающая ситуация получается очень сложной. Однако ван Энгелен [9] доказал следующую теорему 7, если в качестве пространства X выбрать канторово совершенное множество.

Теорема 7. *Пусть дано нульмерное однородное абсолютное борелевское множество A, причём $A \notin \Delta_3^0$. Тогда канторово совершенное множество плотно однородно относительно A.*

Следующая теорема показывает, что выбор канторового совершенного множества в качестве объемлющего пространства является существенным. Напомним, что бэровское пространство $B(\omega)$ – это счётная степень счётного дискретного пространства в тихоновской топологии.

Теорема 8. *Пусть дано нульмерное пространство X первой категории, счётная степень которого гомеоморфна самому пространству X. Тогда бэровское пространство $B(\omega)$ не плотно однородно относительно пространства X.*

Доказательство. Построим два всюду плотных вложения пространства X в бэровское пространство $B(\omega)$.

По условию теоремы счётная степень X^ω гомеоморфна пространству X. Следовательно, в пространстве X нет изолированных точек. Как известно [3], канторово множество C является универсальным для нульмерных сепарабельных метрических пространств. Поэтому оно содержит всюду плотное подмножество Y, гомеоморфное X. В пространстве $B(\omega)$ возьмём всюду плотное счётное множество Q_1. Тогда [3] произведение $X_1 = Y \times Q_1$ гомеоморфно X. Несложно проверить, что X_1 всюду плотно в произведении $B_1 = C \times B(\omega)$, причём $B_1 \approx B(\omega)$. По построению X_1 лежит внутри σ-компактного множества $E = C \times Q_1$.

С другой стороны, пространство X нигде не локально компактно, так как оно является пространством первой категории. Поэтому в бэровском пространстве $B(\omega)$ найдётся всюду плотное множество Z, гомеоморфное X. Более того, существует такое замкнутое в пространстве $B(\omega)$ дискретное бесконечное счётное множество D, что $D \subset Z$. Очевидно, что множество D замкнуто также относительно Z. Тогда множество $X_2 = Z^\omega$ всюду плотно в пространстве $B_2 = B(\omega)^\omega \approx B(\omega)$. По построению, множество D^ω замкнуто в B_2 и содержится в X_2.

Допустим, что существует гомеоморфизм $f : B_1 \to B_2$, для которого $f(X_1) = X_2$. Так как непрерывный образ компактного пространства является компактным пространством, то множество $f(E)$ будет σ-компактным в силу непрерывности отображения f. При этом образ $f(E)$ содержит замкнутое подмножество D^ω. Следовательно, множество D^ω окажется σ-компактным пространством. По построению множество D^ω гомеоморфно бэровскому пространству $B(\omega)$. Отсюда следовало бы, что бэровское пространство $B(\omega)$ является σ-компактным пространством. Однако известно [2], что пространство $B(\omega)$ не σ-компактно. Получили противоречие.

Итак, гомеоморфизма $f : B_1 \to B_2$, переводящего множество X_1 в множество X_2, не существует. Значит, бэровское пространство $B(\omega)$ не плотно однородно относительно пространства X.

Теорема доказана.

Замечание. Теоремы 2–6 и 8 получены автором статьи.

Библиографический список

1. Hrusak, M. Countable dense homogeneity of definable spaces / M. Hrusak, B. Zamora-Aviles // Proc. Amer. Math. Soc.. – 2005. – Vol. 133. – Iss. 11. – Pp. 3429–3435.

2. Куратовский, К. Топология. Т.1.: моногр. / К. Куратовский; пер. с англ. М.Я. Антоновского. – М.: Мир, 1966. – 595 с.

3. Fitzpatric, Jr.B. Countable dense homogeneity and the Baire property / Jr.B. Fitzpatric, H-X. Zhou // Topology Applic. – 1992. – Vol. 43. – Pp. 1–14.

4. Hernandez-Gutierrez, R. Countable dense homogeneity and λ-sets / R. Hernandez-Gutierrez, M. Hrusak, J. van Mill // Preprint. – 2013. – 14 p.

5. Kunen, K. Seven characterizations of non-meager P-filters / K. Kunen, A. Medini, L. Zdomskyy // Preprint available at http://arXiv 1311.1677. – 2013.

6. Medvedev, S.V. On properties of h-homogeneous spaces of first category / S.V. Medvedev // Topology Applic. – 2010. – Vol. 157. – Pp. 2819–2828.

7. Медведев, С.В. К вопросу о пространствах первой категории / С.В. Медведев // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 1986. – № 2. – С. 84–86.

8. Medvedev, S.V. About closed subsets of spaces of first category / S.V. Medvedev // Topology Applic. – 2012. – Vol. 159. – Pp. 2187–2192.

9. van Engelen, F. Homogeneous Borel sets / F. van Engelen // Proc. of Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 96. – Iss. 4. – Pp. 673–682.