УДК 517.521.8

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМОВ ГРОНУОЛЛА В ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ И ВНЕ ЭТОЙ ОБЛАСТИ

Л.В. Матвеева

В настоящей работе подытоживаются результаты исследования полиномов Гронуолла, начатые в работе автора «Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла» и продолженные в других работах автора.

Ключевые слова: методы суммирования, полиномы Гронуолла, скорость сходимости.

Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в некоторой окрестности начала координат. Тогда функция $f(z)$ раскладывается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Обозначим m-ю частичную сумму этого ряда через $s_m^f = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$, через S_f множество особых точек функции $f(z)$ и через A_f – максимальную область, в которую продолжается $f(z)$. Частичную сумму ряда функции $\frac{1}{1-z}$ обозначим через $\sigma_n(z)$.

Определение. Линейный метод B, определяемый бесконечной матрицей $(b_{m,n})$, суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$ равномерно внутри области $D \subset \mathbb{C}$, если существует такой номер m_0, что для любого компакта $Q \subset D$ и для всех $m \geq m_0$ ряды $\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)$ равномерно сходятся к функции $f(z)$ на компакте Q.

Определение. Область $U \subset A_f$ назовем C-областью функции $f(z)$, аналитичной в некоторой окрестности начала координат, если существует линейный метод, суммирующий последовательность $\{s_m^f(z)\}$ к $f(z)$ равномерно внутри U.

Естественно рассматривать такие линейные методы, максимальные C-области которых включают в себя круг сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Тогда метод суммирования позволяет вычислить как значения функции в круге сходимости степенного ряда, так и значения ее аналитического продолжения в C-области. Большинство предлагаемых методов суммирования суммируют ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ в звездных областях, т.е. в областях, содержащих с каждой точкой отрезок, соединяющий эту точку и начало координат. [1]

В работе [2] показано, что если метод $(b_{m,n})$ суммирует $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ к $1/(1-z)$ в некоторой области D, то можно описать область D_f, в которой этот метод, будет суммировать $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ к $f(z)$. Поэтому изучение C-областей метода суммирования достаточно провести для геометрического ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

Односвязная область D называется производящей, если выполнены условия: (1) D содержит начало координат; (2) D не содержит множества $\{1\} \cup \{\infty\}$.

Частной производящей областью функции $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, соответствующей производящей области D, назовем множество $D_f = \left\{z\colon \frac{z}{\xi} \in D \text{ для всех } \xi \in S_f \right\}$.

Теорема. (Обобщение теоремы Окада [3]) *Пусть при $m \geq m_0$ все степенные ряды $\varphi(z,m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} z^{k+1}$ являются целыми функциями, и пусть $\{q_m\}$ – некоторая последовательность. Пусть для любого замкнутого подмножества $Q \subset D$ производящей области D существует такая постоянная C_Q, что выполнены условия:*

(1) $\varphi(1,m) \to 1$ при $m \to \infty$;

(2) для всех $z \in Q$ и для всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство $|\varphi(z,m)| < C_Q q(m)$.

Тогда для любой функции $f(z)$, аналитической в некоторой окрестности начала координат, и для любого замкнутого множества $G \subset D_f$ найдутся такие постоянные $M_G > 0, N_G > 0$, что для всех $m \geq m_0$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k}\, s_k^f - f(z)\right| < M_G q(m) + N_G |1 - \varphi(1,m)|$.

Если, кроме того, для некоторой последовательности $\{q_1(m)\}$ и для любого замкнутого множества $Q \subset D$ существует такая постоянная $C_{Q'} > 0$, что для всех $z \in Q$ и всех $m > m_0$ справедливо неравенство

(3) $|\varphi(z,m-1) - \varphi(z,m)| < C_{Q'} q_1(m)$,

то существует такая постоянная $R_G > 0$, что для всех $z \in G$ и всех $m > m_0$ справедливо неравенство $\left|\sum_{k=0}^{\infty} b_{m-1,k} s_k^f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} b_{m,k} s_k^f(z)\right| < R_G q(m) + N_G q_1(m)$.

Гронуолл в работе [4] ввел широкий класс методов суммирования расходящихся рядов, который содержит многие известные методы суммирования. А.А. Меленцов, используя методы суммирования Гронуолла, нашел метод, суммирующий ряд и на отрезке луча, лежащим за особой точкой функции, т.е. в незвездной области.

Метод Гронуолла $\left[F(w); \frac{1}{1-w}\right]$ задается отображающей функцией $F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \,(c_1 \neq 0)$ и конкретной весовой функцией $g(w) = 1/(1-w)$, и элементы его матрицы определяются по формулам:

$$c_{m,n}^F = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{\big(1 - F(w)\big) F^n(w)}{(1-w) w^{m+1}}\, dw (m, n \geq 0),$$

где интегрирование ведется по γ – простому, достаточно малому контуру вокруг начала координат. На отображающую функцию $F(w)$ в работе [1] накладываются три условия: 1) $F(w)$ аналитична в замкнутом единичном круге $\overline{K}$, исключая, может быть, точку $w=1$, и однолистна в K; 2) $F(w)$ непрерывна в $\overline{K}$, $F(0)=0$, $F(1)=1$, $F(K) \subseteq K$; 3) ряд Тейлора $F(w)$ абсолютно сходится при $w=1$. Последнее условие отличается от первоначального условия Гронуолла и предложено А.А. Меленцовым, но оказалось удобнее для оценки скорости сходимости в случае весовой функции $g(w) = 1/(1-w)$.

Определение. Полином $P_m^F(z) = \sum_{n=0}^m c_{m,n}^F (\sum_{k=0}^n z^k)$ будем называть m-м полиномом Гронуолла метода $[F(w), {}^1/_{(1-w)}]$.

Из условия $F(0)=0$ следует, что $c_{m,n}^F = 0$ при $n>m$, поэтому степень m-го полинома Гронуолла не превосходит m. Область $T(F)$, ограниченную кусочно-гладкой кривой $\tau(F)=\{z : z=[F(e^{ix})]^{-1}, x\in[0;2\pi]\}$ назовем областью суммируемости метода $[F(w), \frac{1}{1-w}]$. Как доказано в работах [4] и [5] метод $[F(w); \frac{1}{1-w}]$ суммирует ряд $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$ к $1/(1-z)$ в области $T(F)$.

Теорема Бирinделли [5]. *Геометрический ряд* $1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$ *суммируется методом* $[F(w), \frac{1}{1-w}]$ *к сумме* $1/(1-z)$ *внутри кривой* $\tau(F)=\{z : z=[F(e^{ix})]^{-1}, x\in[0;2\pi]\}$.

Вне этой области последовательность $P_m^F(z)$ расходится. Условие $F(K)\subseteq K$ означает, что область суммируемости метода $[F(w), \frac{1}{1-w}]$ включает область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$.

В работе [6] оценивалась скорость сходимости полиномов Гронуолла в случае аналитической отображающей функции внутри области $T(F)$.

Теорема [6]. *Пусть отображающая функция* $F(w)$ *аналитична в* $\overline{K}$ *и* $g(w)=\dfrac{1}{1-w}$. *Тогда для любого замкнутого множества* $Q\subset T(F)$ *найдутся такие постоянные* $C_Q>0$ *и* $R_Q>1$, *что для всех* $z\in Q$ *и всех* $m\geq 0$:

$$|P_m^{[F;g]}(z)-\frac{1}{1-z}|\leq \frac{C_Q}{R_Q^m}.$$

В работе [7] оценивалась скорость сходимости полиномов Гронуолла внутри области $T(F)$ в случае отображающей функции, с заданным модулем непрерывности на единичной окружности. Обозначим через $W^r H^\omega(L_{h,\varphi})$ класс таких аналитических в $L_{h,\varphi}$ функций $F(w)$, что $F^{(r)}(w)$ непрерывна до границы $L_{h,\varphi}$ и $\omega(\delta, F^{(r)})$ не превосходит фиксированного модуля непрерывности $\omega(\delta) \neq 0$.

Теорема [7]. *Пусть отображающая функция* $F(w)$ *принадлежит классу* $W^r H^\omega(L_{h,\varphi})$. *Тогда для любого замкнутого множества* $Q < T(F)$ *найдется такая постоянная* $C_Q > 0$, *что для всех* $z \in Q$ *и для всех* $m > r+1$ *справедливо неравенство:*

$$\left|P_m^F(z) - \frac{1}{1-z}\right| < C_Q \int_0^{1/(m-r)} t^{r-1}\omega(t)dt.$$

В работе [8] показано, что последовательность $P_m^F(z)$ на границе области $T(F)$ ограничена для каждого $z \neq 1$.

Теорема [8]. *Если отображающая функция $F(w)$ имеет ограниченное изменение на единичной окружности и ее производная не равна 0 на единичной окружности, то для каждого $z \in \tau(F) \backslash \{1\}$ последовательность $\{P_m^F(z)\}$ ограничена.*

В работе [9] показано, что вне области суммируемости последовательность полиномов Гронуолла $P_m^F(z)$ расходится достаточно быстро со скоростью порядка $\frac{1}{\rho^{m+1}}$, где $0 < \rho < 1$.

Теорема [9]. *Для любой точки z, лежащей вне замыкания области суммируемости $\overline{T(F)}$, найдутся такие точка $w_0 \in K$ и постоянная $C \neq 0$, что:*

$$\lim_{m \to \infty} P_m^F(z) w_0^{m+1} = C.$$

Библиографический список

1. Кук, Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей / Р. Кук. – М.: Физматгиз, 1980. – 472 с.

2. Матвеева, Л.В. Оценка скорости сходимости последовательности полиномов Гронуолла / Л.В. Матвеева // Исслед. по функцион. анализу. – Свердловск: Ур. гос. ун-т. – 1978. – С. 49–64.

3. Матвеева, Л. В. Области равномерной сходимости и теорема Окада / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2011.– Т. 3. – С. 149–152.

4. Gronwall, T.H. Summation of series and conformal mapping / T.H. Gronwall // Ann. Math. – 1932. – V. 33, N 2. – Pp. 101–117.

5. Birindelli, C. Contributo all' analisi dei metodi di sommazione di Gronwall / C. Birindelli // Rendic. del Circolo Matemat. de Palermo. – 1937. – V. 61. – Pp. 157–176.

6. Матвеева, Л.В. Полиномы Гронуолла с аналитической отображающей функцией / Л.В. Матвеева // Наука ЮУрГУ. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. – Т. 2. – С. 153–156.

7. Матвеева, Л.В. Зависимость скорости сходимости полиномов Гронуолла от свойств отображающей функции / Л.В. Матвеева // Матем. заметки. – 1980. – Т. 28, № 4. – С. 513–524.

8. Матвеева, Л.В. Поведение полиномов Гронуолла на границе области суммируемости / Л.В. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2012. – Вып. 7, № 34(293). – С. 165–167.

9. Матвеева, Л.В. Поведение полиномов Гронуолла вне области суммируемости / Л.В. Матвеева // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013 – Т. 5, Вып. 2. – С. 156–159.

К содержанию