УДК 519.833.7

О СИЛЬНО ГАРАНТИРОВАННОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ИГРЫ

К.Н. Кудрявцев, И.С. Стабулит, С.А. Шунайлова

Формализуется понятие сильно гарантированного решения в кооперативной игре двух лиц с побочными платежами и при неопределенности. В линейно-квадратичном варианте игры найден явный вид такого решения и установлены коэффициентные условия его существования.

Ключевые слова: кооперативная игра, неопределенность, риск, гарантированное решение.

Систематическое изучение кооперативных игр при неопределенности началось с монографии В.И. Жуковского [1]. В ней был заложен один из подходов к формализации различных понятий оптимальности в игровых задачах при неопределенности, основанный на построении аналога седловой точки. Однако, этому подходу свойственен ряд негативных свойств. Наиболее же существенным «минусом» является то, что опирающиеся на аналог седловой точки принципы оптимальности не устойчивы к отклонению неопределенности. Решения, оптимальность которых сохраняется при любой реализации неопределенности, можно формализовать на основе аналога максимина [2]. Такой подход был использован в [3] для бескоалиционных игр при неопределенности, в данной работе он будет применен к кооперативной игре при неопределенности.

Рассмотрим кооперативную игру двух лиц с побочными платежами и при неопределенности в нормальной форме, которая отождествляется с кортежем:

$$\left\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \right\rangle. \quad (1)$$

Здесь 1 и 2 – порядковые номера игроков, $\mathrm{X}_i \subseteq \mathrm{R}^{n_i}$ – множество *стратегий* x_i у *i*-го игрока, пара $x = (x_1, x_2) \in \mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$ называется *ситуацией* игры (1), $\mathrm{Y} \subseteq \mathrm{R}^m$ – множество значений y, принимаемых нестохастическими неопределенными факторами, $f_i(x,y)$ – скалярная функция выигрыша *i*-го игрока $(i = 1,2)$.

Игра протекает следующим образом. Игроки совместно и согласованно выбирают свои стратегии, в результате чего складывается ситуация $x = (x_1, x_2)$. Независимо от действий игроков реализуется конкретное значение неопределенного фактора $y \in \mathrm{Y}$. На образовавшейся в результате паре $(x,y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ каждый *i*-й игрок $(i = 1,2)$ вычисляет свой *предварительный выигрыш* – значение функции выигрыша $f_i(x,y)$ на сложившейся паре. На следующем этапе игры игроки перераспределяют между собой образовавшийся суммарный выигрыш $f_1(x,y) + f_2(x,y)$. Полученная в результате перераспределения часть суммарного выигрыша и есть *выигрыш игрока i*. Целью *i*-го игрока является такой согласованный с партнером выбор стратегии x_i, и такое последующее перераспределение суммарного выигрыша, чтобы его окончательный выигрыш оказался по возможности *большим*, учитывая при этом возможность реализации любого значения неопределенного фактора из множества Y.

В отличие от использованного в [4] аналога седловой точки, формализуем решение игры (1) на основе аналога максимина. Для этого предположим возможность *информационной дискриминации* игроков, а именно рассматриваем игру:

$$\left\langle \{1,2\}, \{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}^{\mathrm{X}}, \{f_i(x,y)\}_{i=1,2} \right\rangle, \quad (2)$$

отличающуюся от (1) лишь тем, что Y заменено на Y^{X} – множество всех функций $y(x)$ (*контрситуаций* в терминологии Н.Н. Красовского [5]), заданных на X со значениями в Y, m-вектор-функции $y(x)$ далее будем называть *неопределенностями в игре* (2), а функции выигрыша $f_i(x,y)$ понимать как суперпозиции $f_i(x,y) = f_i(x, y(x))$ $(i = 1,2)$.

Партия игры разыгрывается следующим образом. Игроки совместно и согласованно выбирают каждый свою стратегию $x_i \in \mathrm{X}_i$ $\left(i=1,2\right)$. В результате образуется ситуация игры (2) – упорядоченный набор стратегий $x=\left(x_1,x_2\right)\in \mathrm{X}=\mathrm{X}_1\times\mathrm{X}_2$. Предполагаем *информационную дискриминацию* игроков и *дополнительную «информированность»* неопределенности. Именно, по аналогии с иерархическими играми первый ход здесь за игроками: они выбирают свои стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ $\left(i=1,2\right)$ и сообщают об этом ЛПР, «ведающему» построением неопределенностей. Второй ход за указанным ЛПР – он формирует две неопределенности в виде непрерывных на X m-вектор-функций $y^{(i)}\left(x\right)$ $\left(i=1,2\right)$ и сообщает о своем выборе игрокам. При этом предполагается, что неопределенности формируются таким образом, чтобы «максимально испортить» выигрыши отдельно каждому игроку. Игроки, используя эту информацию, выбирают ситуацию, доставляющую «хороший» выигрыш (например, гарантированный дележ) каждому из игроков.

Формализацию сильно гарантированного решения (СГР) проведем в два этапа:

Этап 1. Каждой ситуации $x\in\mathrm{X}$ и каждому игроку $i=1,2$ поставим в соответствие единственную непрерывную на X вектор-функцию $y^{(i)}\left(x\right)$ такую, что:

$$f_i\left(x,y^{(i)}\left(x\right)\right)=\min_{y\in\mathrm{Y}} f_i\left(x,y\left(x\right)\right)=f_i\left[x\right] \quad \left(i=1,2\right).$$

Этап 2. Игре (2) сопоставим кооперативную игру двух лиц с побочными платежами (без неопределенностей) – «игру гарантий»:

$$\left\langle \{1,2\},\{\mathrm{X}_i\}_{i=1,2},\{f_i\left[x\right]\}_{i=1,2}\right\rangle,$$

и найдем для нее гарантированный дележ, а именно ситуацию $x^e=\left(x_1^e,x_2^e\right)\in\mathrm{X}$ и вектор $f^e=\left(f_1^e,f_2^e\right)\in\mathrm{R}^2$, для которых выполнены:

во-первых, *условие коллективной рациональности*:

$$\max_{x\in\mathrm{X}}\left(f_1\left[x\right]+f_2\left[x\right]\right)=f_1\left[x^e\right]+f_2\left[x^e\right];$$

во-вторых, *условие индивидуальной рациональности*: если

$$f_1\left[x^e\right]+f_2\left[x^e\right]=f_1^e+f_2^e,$$

то справедлива система из двух неравенств:

$$f_1^e\geq\max_{x_1\in\mathrm{X}_1}\min_{x_2\in\mathrm{X}_2}f_1\left[x\right],\quad f_2^e\geq\max_{x_2\in\mathrm{X}_2}\min_{x_1\in\mathrm{X}_1}f_2\left[x\right].$$

Полученную в результате пару $\left(x^e, f^e\right) \in \mathrm{X} \times \mathrm{R}^2$ назовем *сильно гарантированным решением* игры (1), при этом x^e есть *сильно гарантирующая ситуация* игры (1), а f_i^e *сильно гарантированный дележ игрока i* $\left(i=1,2\right)$.

«Игровой смысл» предлагаемого решения состоит в следующем. Если игроки выбрали стратегии $x_i \in \mathrm{X}_i$ $\left(i=1,2\right)$, то каждый *i*-й из них «обеспечивает» себе выигрыш $f_i\left(x,y\right)$, не меньший $f_i\left[x\right]$ при реализации любых значений неопределенных факторов $y \in \mathrm{Y}$, то есть $f_i\left[x\right]$ есть гарантия для игрока *i* при использовании всеми игроками своих стратегий из ситуации $x \in \mathrm{X}$ и появлении (независимо от их выбора) любой неопределенности $y \in \mathrm{Y}$.

Предположим, что в игре (1) $\mathrm{X}_i = \mathrm{R}^n$, $\mathrm{Y} = \mathrm{R}^m$ (задача без ограничений), а функции выигрыша линейно-квадратичны по x_i, y и имеют вид:

$$\begin{aligned} f_1\left(x,y\right) &= x_1' A_{11} x_1 + 2x_1' x_2 + x_2' A_{12} x_2 + \\ &\quad + 2x_1' C_1 y + y' D_1 y + 2a_1' x_1 + 2b_1' x_2, \\ f_2\left(x,y\right) &= x_1' A_{21} x_1 - 2x_2' x_1 + x_2' A_{22} x_2 + \\ &\quad + 2x_2' C_2 y + y' D_2 y + 2a_2' x_1 + 2b_2' x_2, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_1, x_2 – *n*-вектора (столбцы), y – *m*-вектора-столбец, штрих сверху означает операцию транспонирования, постоянные векторы a_i, b_i и матрицы A_{ij}, C_i, D_i соответствующих размерностей, причем A_{ij} и D_i – симметричны $\left(i,j=1,2\right)$; далее $A_{ij} < 0$ $\left(D_i > 0\right)$ означает, что квадратичная форма $x_j' A_{ij} x_j$ $\left(y' D_i y\right)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна).

Итак, далее рассматриваем кооперативную игру двух лиц с побочными платежами и при неопределенности:

$$\left\langle \left\{1,2\right\}, \left\{\mathrm{X}_i = \mathrm{R}^n\right\}_{i=1,2}, \mathrm{Y}{=}\mathrm{R}^m, \left\{f_i\left(x_1,x_2,y\right) \div (3)\right\}_{i=1,2} \right\rangle, \tag{4}$$

здесь функции выигрыша $f_i\left(x_1,x_2,y\right)$определены в (3), стратегиями *i*-го игрока являются *n*-вектора-столбцы $x_i \in \mathrm{R}^n$, неопределенные факторы принимают значения $y \in \mathrm{R}^m$.

Утверждение 1. Если в (3) матрицы:

$$A_{ij} < 0, \quad D_i > 0 \quad \left(i,j=1,2\right),$$

то у игроков в игре (4) не существует максиминных стратегий.

Утверждение 2. Если в (3) матрицы:

$$A_{ij} < 0, \quad D_i > 0 \quad \left(i,j=1,2\right),$$

то сильно гарантированное решение игры (4) существует и имеет вид $\left(x^e, f^e\right)$, где сильно гарантирующая ситуация $x^e = \left(x_1^e, x_2^e\right)$ определяется формулами:

$$x_1^e = -\left[A_{11} + A_{21} - C_1 D_1^{-1} C_1'\right]^{-1} \left(a_1 + a_2\right),$$

$$x_2^e = -\left[A_{12} + A_{22} - C_2 D_2^{-1} C_2'\right]^{-1} \left(b_1 + b_2\right),$$

а сильно гарантированный дележ – любой вектор $\left(f_1^e, f_2^e\right) \in \mathrm{R}^2$, для которого:

$$f_1^e + f_2^e = -\left(a_1' + a_2'\right)\left[A_{11} + A_{21} - C_1 D_1^{-1} C_1'\right]^{-1} \left(a_1 + a_2\right) - \\ - \left(b_1' + b_2'\right)\left[A_{12} + A_{22} - C_2 D_2^{-1} C_2'\right]^{-1} \left(b_1 + b_2\right).$$

Библиографический список

1. Жуковский, В.И. Кооперативные игры при неопределенности и их приложения / В.И. Жуковский. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – С. 336.

2. Zhukovskiy, V.I. The Vektor-Valued Maximin / V.I. Zhukovskiy, M.E. Salukvadze. – N.Y.: ACADEMIC PRESS. – 404 p.

3. Жуковский, В.И. Уравновешивание конфликтов при неопределенности. II. Аналог максимина / В.И. Жуковский, К.Н. Кудрявцев // Математическая теория игр и ее приложения. – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 3–45.

4. Кудрявцев, К.Н. О существовании гарантированных по выигрышам и рискам решений в кооперативных играх при неопределенности / К.Н. Кудрявцев // Системы управления и информационные технологии, 1.1(39). – 2010. – С. 148–152.

5. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М: Наука, 1974. – 456 с.

К содержанию