УДК 517.988.52

ЗАМЕЧАНИЕ К ТЕОРИИ ВОГНУТЫХ И ПСЕВДОВОГНУТЫХ ОПЕРАТОРОВ

М.Л. Катков

В настоящей работе определяется класс операторов, так называемых k-сжатий. Понятие k-сжатия является естественным обобщением понятий u_0-вогнутого и u_0-псевдовогнутого операторов, рассмотренных в [1] и [2]. Для операторов из выделенного класса доказывается сходимость итераций к неподвижной точке. Монотонность оператора не предполагается.

Ключевые слова: положительный оператор, вогнутый оператор, гетеротонный оператор.

Пусть X – банахово пространство, полуупорядоченное конусом K, $K(u_0)$ – компонента, порожденная элементом $u_0 \in K$ [1].

Определение метрики, порожденной порядком:

$$\rho(x;y) = \min\left\{t:\ e^{-t}x \le y \le e^{t}x;\ x;y \in K(u_0);\ t \le 0\right\}.$$

Определение k-сжатия. Положительный оператор T, действующий в X, будем называть k-сжатием, если выполняются условия:

1) для любого $x \in K(u_0)$ $Tx \in K(u_0)$;

2) для любых $x, y \in K(u_0)$ существует $q = q(x;t)$ такое, что $0 < q(x;t) < 1$ $(t = \rho(x,y))$, при котором выполняется неравенство:

$$\rho(Tx;Ty) \le q(x;t)\rho(x;y).$$

Замечание 1. Монотонный u_0-вогнутый оператор [1] является k-сжатием.

Замечание 2. Гетеротонный u_0-псевдовогнутый оператор является k-сжатием. Действительно, пусть $\hat{T}$ – сопутствующий оператор для гетеротонного оператора T [2], пусть $t=\rho(x;y)$. Тогда имеем очевидные неравенства:

$$Tx=\hat{T}(x;x)\le\hat{T}\left(e^t y;e^{-t}y\right)\le e^{qt}\hat{T}(y;y)=e^{qt}Ty,$$

$$Ty=\hat{T}(y;y)\le\hat{T}\left(e^t x;e^{-t}x\right)\le e^{qt}\hat{T}(x;y)=e^{qt}Tx.$$

Поэтому:

$$\rho(Tx;Ty)\le q(x;t)\rho(x;y).$$

Теорема. *Пусть оператор T является k-сжатием и имеет неподвижную точку $x_*\in K(u_0)$. Тогда для любого $y_0\in K(u_0)$ последовательность $\{y_n\}$, где $y_n=T(y_{n-1})$, сходится к x_* по метрике ρ.*

Доказательство. Положим $t_n=\rho(y_n,x_*)$. Последовательность $\{t_n\}$ убывает. Предположим, что

$$t=\lim_{n\to\infty}t_n\ne 0.$$

Рассмотрим шар с центром в точке x_* радиуса t. Оператором T этот шар отображается в шар с центром в этой же точке радиуса $q(x_*,t)t$, так как оператор T есть k-сжатие. Положим ε равным $t-qt$. Возьмем n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $e^{t_n}<e^t+e^{\frac{\varepsilon}{2}}-1$. Положим $z=\alpha x_*+\beta y_n$, где $\alpha+\beta=1$, $\alpha>0$; $\beta>0$. Определим ρ из равенства $\beta=\dfrac{e^t-1}{e^{t_n}-1}$.

В этом случае $\rho(x_*;z)$ оказывается равным t, что очевидным образом следует из системы неравенств:

$$\left(\alpha+\beta e^{-t_n}\right)x_*\le z\le\left(\alpha+\beta e^{t_n}\right)x_*;$$

$$e^{-t_n}x_*\le y_n\le y^{t_n}x_*.$$

Непосредственной проверкой устанавливается справедливость системы неравенств:

$$e^{-\frac{\varepsilon}{2}}y_n\le\left(\alpha e^{-t_n}+\beta\right)\le z\le\left(\alpha e^{t_n}+\beta\right)y_n\le e^{\frac{\varepsilon}{2}}y_n.$$

Поэтому $\rho(Tz,Ty_n)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

В результате неравенство треугольника приводит к очевидному противоречию:

$$t \le \rho\left(x_*; y_{n+1}\right) \le \rho\left(Tx_*, Tz\right) + \rho\left(Tz; Ty_n\right) \le t - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теорема доказана.

Библиографический список

1. Красносельский, М.А. Геометрические методы нелинейного анализа / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. – М.: Наука, 1975. – 512 с.

2. Опойцев, В.И. Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов / В.И. Опойцев // Труды Московского математического общества. – 1978. – И. 36. – С. 237–380.

3. Катков, М.Л. О существовании неподвижной точки у равномерно сжимающего монотонного оператора / М.Л. Катков // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2013. – Т. 5, № 2. – С. 160–161.

4. Катков, М.Л. Замечание к теории вогнутых операторов / М.Л. Катков // Наука ЮУрГУ: Материалы 65-й научной конференции. Секции естественных наук. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2013. – С. 35–38.