УДК 517.977.58

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ СМЕШАННОГО ЖЕСТКОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛЕОНТЬЕВСКОГО ТИПА

А.А. Эбель

Рассматривается постановка задачи смешанного жесткого управления системы уравнений леонтьевского типа.

Ключевые слова: задача смешанного жесткого управления, система уравнений леонтьевского типа, условие Шоултера-Сидорова.

Пусть M и L – квадратные матрицы $n \times n$, причем $\det L = 0$, матрица M (L, p)–регулярна ($\exists \lambda \in C : \det(\lambda L - M) = 0$ $\exists p \in \{0\} \cup N$ равное нулю, если в точке ∞ $L-$резольвента $(\lambda L - M)^{-1}$ матрицы M имеет устранимую точку и равна порядку полюса в противном случае).

При постановке задачи смешанного жесткого управления для систем леонтьевского типа введем в рассмотрение пространства:

– состояний:

$$X = H^1(R^n) = \{x \in L_2((0;\tau);R^n) : \dot{x} \in L_2((0;\tau);R^n)\};$$

– управлений:

$$U = H^{p+1}(R^n) = \{u \in L_2((0;\tau);R^n) : \dot{u} \in L_2((0;\tau);R^n)\},$$
$$U^0 = R^n.$$

Выделим в U^0 компактное и выпуклое множество начальных допустимых управлений U^0_{ad}, а также компактное и выпуклое множество U_{ad} в пространстве U.

Для решения задачи смешанного жесткого управления будем искать тройку $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in U^0_{ad} \times U_{ad} \times X$ почти всюду удовлетворяющую системе леонтьевского типа:

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + Du(t) + f(t), \tag{1}$$

с начальным условием Шоултера-Сидорова:

$$\left[R^L_\mu(M)\right]^{p+1}(x(0) - u_0) = 0, \tag{2}$$

при этом

$$J(v_0, v(t)) = \min_{(u_0, u(t)) \in U^0_{ad} \times U_{ad}} J(u_0, u(t)), \tag{3}$$

где

$$J(u_0, u(t)) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau \left\| Cx^{(q)}(t, u_0, u(t)) - Cx_0^{(q)}(t) \right\|^2 dt, \tag{4}$$

$$t \in (0;\tau),\ \tau \in R_+.$$

Приведем без доказательства теорему о существовании единственного решения задачи (1), (2).

Теорема. Пусть матрица M (L,p) – регулярна, $p \in \{0\} \cup N$, причем $\det M \neq 0$. Тогда существует единственное решение $(v_0, v(t), x(v_0, v(t))) \in U^0_{ad} \times U_{ad} \times X$ – точка минимума функционала (4), а $x(v_0, v(t))$ – сильное решение задачи (1), (2) и определяется формулой:

$$x(v_0, v(t)) = \lim_{k \to \infty} \left[X_k^t v_0 - \sum_{q=0}^{p} \left(M^{-1}(I - Q_k)L\right)^q M^{-1}(I - Q_k)(f(t) + Du(t))^{(q)} + \right.$$
$$\left. + \int_0^\tau R_k^{t-s} Q_k (f(s) + Du(s)) ds \right]. \tag{5}$$

Здесь:

$$X_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)},$$

$$Q_k = \left(k L_k^L (M) \right)^{p+1},$$

$$R_k^t = \left(\left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1} L \right)^{k(p+1)-1} \cdot \left(L - \frac{t}{k} M \right)^{-1}.$$

Будем искать приближенные решения задачи (1) – (4) в виде:

$$u_0 = \mathrm{col}(a_{01}, \ldots, a_{0n}),$$

$$u(t) = \mathrm{col}\left(\sum_{j=0}^{\ell} a_{1j} t^j, \ldots, \sum_{j=0}^{\ell} a_{nj} t^j \right).$$

В результате алгоритм нахождения приближенного решения (1)–(4) сводится к решению задачи выпуклого программирования относительно массива $A_{n \times \ell+2} = (a_{ij})$ [1].

Преимуществом рассмотрения задачи смешанного жесткого управления в сравнении с задачами стартового и оптимального управления является более гибкое регулирование управляющего воздействия.

Применим задачу смешанного жесткого управления на примере динамической балансовой модели:

$$x(t) = Ax(t) + B\dot{x}(t) + g(t). \qquad (6)$$

Здесь элемент a_{ij} матрицы прямых затрат A означает количество продукции i-й отрасли необходимой для производства единицы продукции и/или услги j-й отрасли. Элемент b_{ij} матрицы B представляет определенный технологический запас особого типа благ (машины, механические инструменты, промышленные здания и сооружения, рабочий запас первичных и промежуточных материалов), производимых i-й отраслью, который используется j-й отраслью для производства единицы продукции и/или услуги им выпускаемым, или удельные капитальные вложения. В любой динамической балансовой модели предприятия, матрица B всегда содержит нулевые строки, а условие $\det B = 0$ является естественным в экономических приложениях, так как не все отрасли являются производительными. Элементы $g_i(t)$ вектор-функции $g(t)$ показывают выпуск конечного продукта i-й отраслью или спрос на продукцию i-й отрасли. Элементы $x_i(t)$ вектор-функции $x(t)$ есть значения валового выпуска продукции i-й отрасли. Т.е. система уравнений (6) означает, что общая стоимость валового выпуска продукции распределяется на внутреннее потребление Ax, развитие основных производственных фондов $B\dot{x}$ и на внешнее потребление $g(t)$.

Очевидно, что систему уравнений (6) можно записать в следующем виде:

$$L\dot{x}(t) = Mx(t) + f(t), \tag{7}$$

где матрица $M = I - A$, $L = B$, $y(t) = -g(t)$ с соответствующим экономическим смыслом.

Работа любой экономической системы подчинена определенным целям, для достижения которых необходимо управление такой системой, поэтому включение в динамическую балансовую модель управления и приведение к одной из задач смешанного управления приводит к получению более адекватным реальным экономическим задачам моделям.

Начальное условие Шоултера – Сидорова (2) имеет тот же экономический смысл, что и задача Коши, т.е. состояние системы – объем продукции или услуги – в начальный момент времени. Содержания управления в начальном условии (2) $u_{0i}(t)$ для того или иного i-го вида деятельности предприятия исходя из смысла задачи может принимать только неотрицательные значения, и подразумевать необходимость начальных инвестиций в соответствующий вид деятельности.

В отличие от стартового управления для начинающего работать предприятия (проекта) только начальное управляющее воздействие редко имеет место применения на практике. В задаче (1)–(4) управление входит в систему (1), управление $u_i(t)$ для каждого i-го вида деятельности предприятия может принимать как положительные, так и неположительные значения, если матрица $B = I$. Положительность значений $u_i(t)$ свидетельствуют о доходности i-го вида деятельности, а сами значения определяют количество ресурсов, которые могут быть перенаправлены, например, в другие отрасли. Отрицательность значений $u_i(t)$ свидетельствуют о затратности i-го вида деятельности, а сами значения определяют количество ресурсов, которые востребованы, например, из других отраслей.

Функционал стоимости (4) отражает цели управления экономической системой. Учитывая, что $x_0(t)$ – плановый выпуск продукции, $Cx(t)$ и $Cx_0(t)$ – это фактическая и плановая величина, выражаемая через выпуск продукции, например, прибыль. Отличительной особенностью задачи смешанного жесткого управления системы уравнений леонтьевского типа является то, что критерием качества управления будет только достижение плановых показателей с сохранением плановых темпов прироста без учета управления как u_0, так и u.

В докладе представлены результаты расчетов для балансовой модели А.Г. Гранберга [2]. Эта модель народного хозяйства состоит из трех отраслей: производство орудий труда, производство предметов труда и производство предметов потребления. Капитальные вложения осуществляются только первой отраслью. Вторая обеспечивает промежуточное потребление. Весь фонд потребления учитывается третьей отраслей.

Расчеты проводились согласно данным приведенным для модели А.Г. Гранберга [2]:

$$L=\begin{pmatrix}1{,}5 & 1{,}6 & 0{,}9\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ M=\begin{pmatrix}0{,}9 & -0{,}116 & -0{,}075\\ -0{,}5 & 0{,}452 & -0{,}425\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$f(t)=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -32-10t\end{pmatrix},\ x_0(t)=\begin{pmatrix}18+t\\ 50+t\\ 32+10t\end{pmatrix}.$$

Матрицы D, C и N приняты единичными.

Библиографический список

1. Келлер, А.В. Об алгоритме решения задач оптимального и жесткого управления / А.В. Келлер // Программные продукты и системы. – 2011. – № 3. – С. 170–174.

2. Гранберг, А.Г. Динамические модели народного хозяйства / А.Г. Гранберг. – М.: Экономика, 1985. – 239 с.