УДК 517.956.226

ОБ АСИМПТОТИКЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ СМЕНЫ УСТОЙЧИВОСТИ

Е.А. Деркунова

Построена и обоснована асимптотика решения сингулярно возмущенного уравенения в случае, когда корни его вырожденного уравения не являются изолированными во всей рассматриваемой области и проекция их пересечения выходит на начальный отрезок

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, асимптотика, метод пограничных функций, смена устойчивости, метод дифференциальных неравенств

Рассмотрим уравнение:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(u,x,t) \tag{1}$$

с начальным условием:

$$u(x,0,\varepsilon) = u^0(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) ищется в области:

$D = \{(x,t)\colon x_0(t) \le x \le x_1(t),\ 0 \le t \le T\}$, где $x = x_0(t)$ и $x = x_1(t)$ – характеристики, выходящие соответственно из точек (0,0) и (1,0) и определяемые уравнением $\frac{dx}{dt} = \Lambda(x,t)$ (считаем, что $\Lambda(x,t)$ – гладкая функция и все характеристики, выходящие из точек начального отрезка $\{t = 0,\ 0 \le x \le 1\}$ существуют при $0 \le t \le T$).

Хорошо известно [1], что если вырожденное уравнение:

$$f(u,x,t) = 0 \tag{3}$$

имеет корень $u = \varphi(x,t)$, который устойчив в области D, т.е. выполнено неравенство:

$$f_u(\varphi(x,t),x,t) < 0, \quad (x,t) \in D, \tag{4}$$

и если начальная функция $u^0(x)$ принадлежит области притяжения этого корня, то решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) существует и удовлетворяет предельному равенству:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(x,t,\varepsilon) = \varphi(x,t), \quad x_0(t) \le x \le x_1(t), \quad 0 < t \le T. \qquad (5)$$

Более сложная ситуация возникает тогда, когда уравнение (3) имеет корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$, пересекающиеся по некоторой кривой, проекция которой на плоскость (x,t) лежит в области D. Если эта проекция не выходит на начальный отрезок (расположена выше него), то при определенных условиях нетрудно доказать (так же, как это сделано в [2] для обыкновенного дифференциального уравнения), что предельный переход (5) имеет место, но теперь $\varphi(x,t)$ - составной корень уравнения (3), равный соответственно $\varphi_1(x,t)$ и $\varphi_2(x,t)$ по разные стороны от линии пересечения корней. Затем в статье [3] рассматривался еще более сложный случай, когда проекция линии пересечения корней выходит на начальный отрезок при выполнения следующего условия на функцию f: функция правой части уравнения (1) зависит от $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ и имеет вид:

$$f(u,x,t,\varepsilon) = -k(x,t)(u-\varphi_1(x,t))(u-\varphi_2(x,t)) + \varepsilon^{\frac{1}{p}} f_1(u,x,t,\varepsilon^{\frac{1}{p}}),$$

где $p > 1$, k, φ_1, φ_2, f_1 – достаточно гладкие функции, $k(x,t) > 0$, $f_1(u,x,t,0) > 0$ в области D.

Здесь мы продолжим изучение задачи статьи [3]: будем рассматривать случай, когда корни вырожденного уравнения пересекаются по линии, проекция которой выходит на начальный отрезок, но откажемся от непосредственной регуляризации правой части уравнения (1), связанной с членом порядка $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, $p > 1$. При этом наложим на функцию правой части следующее условие

Условие A_1. Функция $f(u,x,t)$ имеет вид:

$$f(u,x,t) = -k(x,t)\big(u-\varphi_1(x,t)\big)\big(u-\varphi_2(x,t)\big),$$

где k, φ_1, φ_2 – достаточно гладкие (дважды непрерывно дифференцируемые) функции, $k(x,t) > 0$ в области D.

При условии A_1 вырожденное уравнение (3) имеет два корня:

$$u = \varphi_1(x,t) \text{ и } u = \varphi_2(x,t).$$

Условие A_2. Корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$ уравнения (3) удовлетворяют соотношениям:

$$\varphi_1(x,t) = \varphi_2(x,t), \quad \text{при} \quad x = \psi(t), \quad 0 \le t \le T,$$

где $\psi(t)$ – гладкая функция, $x_0(t) < \psi(t) < x_1(t)$, при $0 \le t \le T$;

$$\varphi_1(x,t) > \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad x_0(t) \le x < \psi(t), \quad 0 \le t \le T;$$
$$\varphi_1(x,t) < \varphi_2(x,t) \quad \text{при} \quad \psi(t) < x \le x_1(t), \quad 0 \le t \le T.$$

Условие A_2 означает, что корни $u = \varphi_1(x,t)$ и $u = \varphi_2(x,t)$ уравнения (3) пересекаются по кривой, проекция которой на плоскость (x,t) лежит в области D и описывается уравнением $x = \psi(t)$, $0 \le t \le T$. Для краткости будем обозначать эту проекцию буквой C.

Из корней φ_1 и φ_2 образуем два составных корня уравнения (3):

$$\breve{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_1(x,t), & x_0(t) \le x \le \psi(t), \\ \varphi_2(x,t), & \psi(t) \le x \le x_1(t), \end{cases} \quad 0 \le t \le T;$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} \varphi_2(x,t), & x_0(t) \le x \le \psi(t), \\ \varphi_1(x,t), & \psi(t) \le x \le x_1(t), \end{cases} \quad 0 \le t \le T.$$

Отметим, что составные корни $\breve{u}$ и $\hat{u}$ являются непрерывными, но, вообще говоря, негладкими на кривой C. Из условий A_1 и A_2 следует, что:

$$\breve{u}(x,t) > \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in D \backslash C;$$

$$\breve{u}(x,t) = \hat{u}(x,t), \quad (x,t) \in C;$$

$$f_u(\breve{u}(x,t),x,t) < 0, \quad f_u(\hat{u}(x,t),x,t) > 0, \quad (x,t) \in D \backslash C; \tag{6}$$

$$f_u(\breve{u}(x,t),x,t) = f_u(\hat{u}(x,t),x,t) = 0, \quad (x,t) \in C. \tag{7}$$

Неравенства (6) позволяют назвать корень $\breve{u}(x,t)$ устойчивым, а корень $\hat{u}(x,t)$ неустойчивым (см. (4)). Следует, однако, заметить, что в точках кривой C неравенство $f_u(\breve{u}(x,t),x,t) < 0$ не выполнено (см. (7)), и это обстоятельство не позволяет однозначно ответить на вопрос о том, будет ли решение $u(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) стремиться при $\varepsilon \to 0$ к составному корню $\breve{u}(x,t)$ в области D (вблизи линии C даже не исключая начального отрезка).

Наконец, потребуем выполнения еще одного условия, которое обеспечивает принадлежность начальной функции $u^0(x)$ области притяжения составного устойчивого корня $\breve{u}(x,t)$.

Условие A_3. $u^0(x) > \hat{u}(x,0)$ при $0 \le x \le 1$.

Основной результат состоит в следующем: если выполнены условия A_1-A_3, то для достаточно малых ε задача (1), (2) имеет решение $u(x,t,\varepsilon)$ и выполняется предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(x,t,\varepsilon) = \breve{u}(x,t), \quad x_0(t) \le x \le x_1(t), \quad 0 < t \le T.$$

Библиографический список

1. Васильева, А.Б. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М: Высшая школа, 1990. – 208 с.

2. Бутузов, В.Ф. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости / В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов, К.Р. Шнайдер // Итоги науки и техники. Сер. Совр. математика и ее прилож. Тематические обзоры. – М.: ВИНИТИ, 2002. – Т. 109. Дифференц. уравнения. Сингулярные возмущения.

3. Бутузов, В.Ф. О сингулярно возмущенном уравнении в частных производных первого порядка в случае пересечения корней вырожденного уравнения / В.Ф. Бутузов, Е.А. Деркунова // Диференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 2. – С. 180–190.