

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕПЛОВЫМ РЕЖИМОМ ЗДАНИЙ

В.И. Панферов, Е.Ю. Анисимова, А.Н. Нагорная  
г. Челябинск, ЮУрГУ

**Рассмотрена задача оптимального управления тепловым режимом здания в нерабочее время. Найден алгоритм оптимального управления режимом прерывистого отопления. Разработан метод построения конкретных графиков подачи теплоты для выбранных зданий, оценена экономическая эффективность оптимального управления в условиях как централизованного, так и автономного теплоснабжения.**

Известно, что в нежилых помещениях в нерабочее время температуру воздуха можно поддерживать на более низком уровне, чем в остальные промежутки времени. Это дает возможность сэкономить расход теплоты на отопление. Однако для получения максимального эффекта от реализации такого, так называемого режима прерывистого отопления необходимо решить задачу об оптимальном управлении этим режимом. Рассмотреть постановку этой задачи.

Как нами установлено [1, 2, 3], температурный режим помещения удовлетворительно может быть описан следующим дифференциальным уравнением

$$T \frac{d\theta(\tau)}{d\tau} + \theta(\tau) = kW_0(\tau), \quad (1)$$

где  $\theta(\tau)$  – избыточная температура,  $\theta(\tau) = t_B(\tau) - t_H(\tau)$ ,  $t_B(\tau)$ ,  $t_H(\tau)$  – соответственно температура внутреннего и наружного воздуха,  $T$  – постоянная времени,  $W_0(\tau)$  – мощность системы отопления,  $\tau$  – время,  $k$  – коэффициент передачи.

Количество теплоты, израсходованной системой отопления, оценивается функционалом

$$I = \int_0^{\tau_H} W_0(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $\tau_H$  – заданное время.

Задача оптимального управления тепловым режимом формулируется следующим образом [4]: требуется найти такое управление мощностью системы отопления  $W_0(\tau)$ , которое переводило бы объект  $\theta(\tau) = \theta_K$  управления (1) из заданного начального состояния  $\theta(0) = \theta_0$  в заданное конечное состояние  $\theta(\tau_H) = \theta_K$  за заданное время  $\tau_H$ , при этом расход теплоты  $I$  системой отопления был бы минимальным. Формально это записывается так:

$$I \rightarrow \min_{W_0}$$

Мощность системы отопления должна при этом удовлетворять следующему ограничению:

$$W_0^{\min} \leq W_0(\tau) \leq W_0^{\max}, \quad (3)$$

где  $W_0^{\max}$  – установленная мощность системы отопления,  $W_0^{\min}$  – минимальная мощность системы отопления, как рекомендуется работой [5], эта мощность должна обеспечить поддержание температуры внутреннего воздуха на уровне  $12^\circ\text{C}$ , исключающем выпадение конденсата на поверхностях ограждений.

В работе [6] формулировалась аналогичная задача оптимального управления, однако при решении этой задачи предполагалось, что температура внутренних поверхностей ограждений «...задана и сохраняет постоянное значение в период натопа». Заметим, что данное допущение, как это нетрудно видеть, означает, что ограждающие конструкции здания, отличающиеся наибольшей теплоемкостью из всех участников теплообмена, никак не влияют на решение поставленной задачи, т.е. на выбор оптимального управления. Далее в работе утверждается, что исходная условная задача сводится к некоей безусловной задаче, экстремалами которой являются прямые линии, т.е. в оптимальном процессе  $t_B(\tau)$  должна быть линейной функцией времени. Затем авторы, полагая дополнительно, что во время натопа и температура наружного воздуха является константой, из модели процесса находят, что оптимальное управление – мощность системы отопления тоже должно быть константой. После этого в работе [6] делается совсем нелогичный вывод, что «...оптимальность управления означает минимальность времени» натопа помещения и авторы переходят к рассмотрению задачи о максимальном быстродействии. Конечно, можно продолжить рассмотрение всех особенностей указанной работы, однако в этом нет

большого смысла: уже отмеченные замечания делают сомнительным обоснованность выводов, поэтому достаточно смело можно утверждать, сформулированная выше задача оптимального управления еще не решена

Кстати говоря, из выводов работы [6] следует, что оптимальное управление имеет только один интервал постоянства, кроме того, авторы, по-видимому, не различают понятия времени натопа и времени максимального быстрогодействия. Время натопа (разогрева помещения) может значительно превышать время максимального быстрогодействия, время максимального быстрогодействия - это минимально возможное время, за которое можно «натопить» помещение до заданной температуры.

В работе [7] оценивается эффективность режима максимального быстрогодействия, причем одним из декларируемых авторами тезисов является утверждение о том, что «разогрев ...необходимо начинать с разогрева наиболее теплеемких частей помещения». Вместе с тем, как уже это отмечалось, при отыскании оптимального управления авторы в [6] полагали, что температура внутренних поверхностей ограждений «...задана и сохраняет постоянное значение в период натопа». Таким образом, наблюдается явное противоречие между допущениями, принятыми при решении задачи, и тем, что рекомендуется при практическом использовании, якобы, этого решения. В целом, создается впечатление, что авторы, поставив, но, в общем-то, так и не решив задачу (как следует из материалов работы [7], это они поняли и сами), либо позаимствовали то, что давно было известно, например, в металлургической теплотехнике из результатов задач оптимального управления нагревом металла, эти результаты были обобщены, в частности, в работах [8, 9], либо высказали свои интуитивные соображения.

Однако вернемся к рассмотрению поставленной задачи и подчеркнем, что для режима прерывистого отопления данная задача имеет следующую особенность: в начале и в конце рассматриваемого промежутка времени  $[0, \tau_H]$  избыточная температура  $\theta(\tau)$  должна быть равна одному и тому же значению  $\theta_0$ , такова особенность режима прерывистого отопления.

Для решения поставленной задачи нами была использована теорема об интервалах в формулировке работы [10], согласно этой теореме оптимальное управление в данной задаче будет представляться кусочно-постоянной функцией, принимающей граничные значения и имеющей не более двух интервалов постоянства.

Для простоты будем считать, что  $\tau_H$  таково, что в графике  $W_0(\tau)$  есть два интервала постоянства и что длительность этих интервалов одинакова. Мощность системы отопления для первого интервала обозначим через  $W_{01}$ , а для второго интер-

вала – через  $W_{02}$ . Так как за время режима прерывистого отопления избыточная температура  $\theta(\tau)$  должна измениться от значения  $\theta_0$  до значения  $\theta_0$  то на основании (1) получается следующее уравнение, связывающее  $W_{01}$  и  $W_{02}$ :

$$kW_{02} + kW_{01} \cdot (1 - a) = \theta_0(2 - a), \quad (4)$$

где  $a = 1 - \exp(-\tau_H / (2T))$ .

Функционал  $I$  преобразуется в обычную функцию двух переменных  $W_{01}$  и  $W_{02}$  и будет иметь вид:

$$I = W_{01} \frac{\tau_H}{2} + W_{02} \frac{\tau_H}{2}. \quad (5)$$

Здесь общий множитель  $\tau_H / 2$  можно просто опустить, так как он не влияет на результаты решения задачи, т.е. на ответ.

Таким образом, поставленная задача оптимального управления свелась к условной задаче нелинейного программирования: требуется найти минимум функции  $I$ , заданной уравнением (5), при условии, что ее аргументы  $W_{01}$  и  $W_{02}$  должны удовлетворять соотношениям (3) и (4):

$$I \rightarrow \min_{W_{01}, W_{02} \in G}, \quad (6)$$

$$\text{где } G: \begin{cases} W_0^{\min} \leq W_{01}, W_{02} \leq W_0^Y; \\ kW_{02} + kW_{01}(1 - a) = \theta_0(2 - a). \end{cases}$$

Заметим, что исходную задачу неклассического вариационного исчисления можно свести к точно такой же задаче нелинейного программирования и другим способом, а именно методом параметризации функции управления, конкретно представляя ее состоящей из двух дискрет одинаковой длительности [11]. Для решения сведем условную задачу оптимизации (6) к безусловной методом подстановки, для этого из уравнения (4) выразим, например,  $W_{02}$  через  $W_{01}$  и подставим в критерий (5), тогда будем иметь, что

$$I = \theta_0 \frac{(2 - a)}{k} + aW_{01} \quad (7)$$

Учитывая, что коэффициент  $a$  в реальных условиях удовлетворяет неравенству  $1 > a > 0$ , из (7) найдем, что чем меньше мощность системы отопления на первом интервале постоянства, тем экономичнее режим, следовательно, на первом интервале мощность системы отопления должна быть равна  $W_0^{\min}$ . Примечательно, что если из (4) выразим  $W_{01}$  через  $W_{02}$  и подставим в критерий оптимальности, тогда задача оптимизации будет иметь вид:

$$I = \theta_0 \frac{2 - a}{k(1 - a)} - W_{02} \frac{a}{(1 - a)} \rightarrow \min_{W_{02}}. \quad (8)$$

Из последнего соотношения следует: чем больше величина  $W_{02}$ , тем меньше величина  $I$ , следовательно, на втором интервале мощность системы отопления должна быть равна  $W_0^y$  [12].

Таким образом, сначала для простоты решения задачи мы полагали, что длительность интервалов постоянства управления одинакова, однако на самом деле это далеко не всегда так, длительность интервалов постоянства в общем случае должна быть различной. Теперь выясним, какой должна быть длительность каждого интервала, с тем чтобы в начале и в конце процесса температура была бы равна  $\theta_0$ . Решение задачи оптимального управления в такой постановке, вероятнее всего, даст больший эффект. Обозначим длительность первого интервала через  $\tau_1$ , а второго – через  $\tau_2$ . Очевидно, что величины связаны следующими соотношениями

$$\begin{cases} kW_{02} \left( 1 - e^{-\frac{\tau_2}{T}} \right) + kW_{01} \left( e^{-\frac{\tau_2}{T}} - 1 + a \right) = a\theta_0; \\ \tau_1 + \tau_2 = \tau_n, \end{cases} \quad (9)$$

где  $W_{01} = W_0^{\min}$  – минимальная мощность системы отопления,  $W_{02} = W_0^{\max}$  – максимальная, установленная тепловая мощность,  $a = 1 - \exp\left(-\frac{\tau_k}{T}\right)$ .

Найдем из первого уравнения системы (9) выражение для определения  $\tau_2$ :

$$\tau_2 = -T \cdot \ln \left( 1 + \frac{\frac{a\theta_0}{k} - aW_{01}}{W_{01} - W_{02}} \right). \quad (10)$$

Из второго уравнения системы (9) найдем, что продолжительность первого интервала времени будет определяться следующим образом:

$$\tau_1 = \tau_k + T \cdot \ln \left( 1 + \frac{\frac{a\theta_0}{k} - aW_{01}}{W_{01} - W_{02}} \right). \quad (11)$$

Функционал  $I$  в этом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} I = W_{01} & \left( \tau_k + T \ln \left( 1 + \frac{\frac{a\theta_0}{k} - aW_{01}}{W_{01} - W_{02}} \right) \right) + \\ & + W_2 \left( -T \ln \left( 1 + \frac{\frac{a\theta_0}{k} - aW_{01}}{W_{01} - W_{02}} \right) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Понятно, что весьма интересен вопрос о том, будет ли справедливым в данном случае установленный при предыдущем допущении результат: чем меньше  $W_{01}$  и чем больше  $W_{02}$ , тем лучше, тем экономичнее режим напора. Ответить на этот вопрос можно, если, во-первых, выяснить, имеют ли поверхности  $(W_{01}, W_{02}, I)$  достаточно типичный вид и, во-вторых, вид этих поверхностей такой, что позволяет ответить на поставленный вопрос.

С этой целью, используя выражение (12), построили зависимость критерия  $I$  от мощности системы отопления на первом и втором промежутках времени. Эта поверхность приведена на рис. 1.

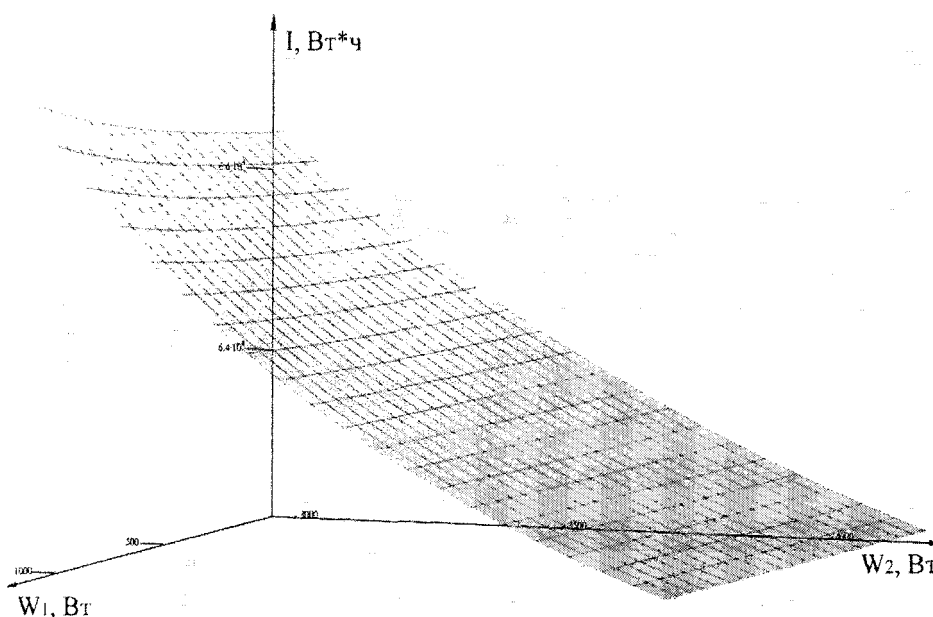


Рис. 1. Изменение критерия  $I$  при различных значениях тепловых мощностей системы отопления на первом и втором временных промежутках (в режиме прерывистого отопления)

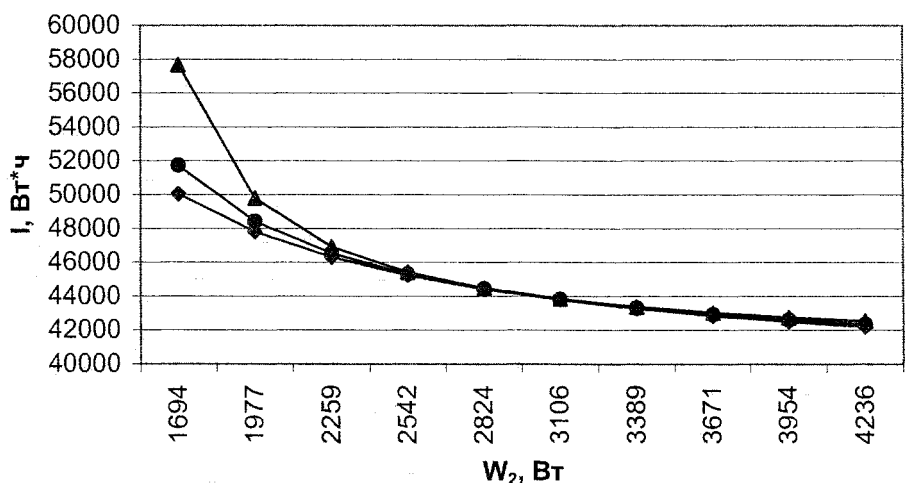
## Теплоэнергетика

На рис. 2, 3 приведены сечения этой поверхности плоскостями  $W_{01} = \text{const}$ , и  $W_{02} = \text{const}$ . Поверхность строилась для области, Вт

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq W_{01} \leq 1200 \\ 3000 \leq W_{02} \leq 4236 \end{array} \right\}$$

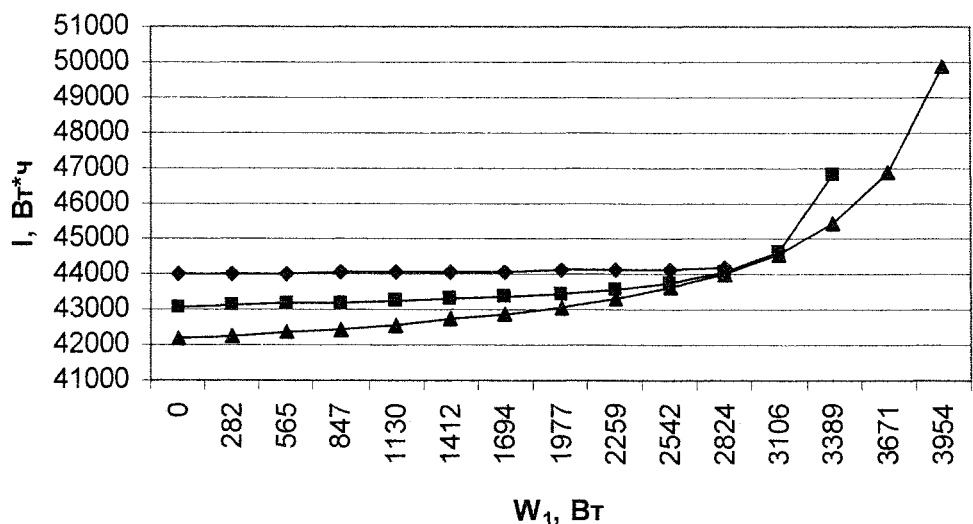
Это обуславливается теплотехническими характеристиками следующего здания. Здание удовлетворяет требованиям второго этапа энергосбережения для города Челябинска. Мощность системы отопления 4236 Вт. Площадь стен дома

$F_{cm} = 79,27 \text{ м}^2$ ; площадь перекрытия  $F_n = 69,12 \text{ м}^2$ . Коэффициент теплопередачи окон  $K_{ок} = 0,6 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ , общая площадь окон  $F_{ок} = 11,55 \text{ м}^2$ . Наружные двери площадью  $F_{дв} = 2,6 \text{ м}^2$ ; коэффициент теплопередачи дверей  $K_{дв} = 1,05 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$ . Температура наружного воздуха  $t_H = -34^\circ\text{C}$ ; начальная температура воздуха в помещениях здания равна  $21^\circ\text{C}$ .



—◆—  $I=f(W_2)$ ,  $W_1=0$ Вт —●—  $I=f(W_2)$  при  $W_1=500$ Вт —▲—  $I=f(W_2)$ ,  $W_1=1000$ Вт

Рис. 2. Зависимость критерия  $I$  от различных значений максимальной мощности  $W_{02}$ , и постоянной минимальной мощности  $W_{01} = 0$  Вт (500 Вт, 1000 Вт)



—◆—  $I=f(W_1)$ ,  $W_2=3000$  Вт —■—  $I=f(W_1)$ ,  $W_2=3500$  Вт —▲—  $I=f(W_1)$ ,  $W_2=4236$  Вт

Рис. 3. Зависимость критерия  $I$  от различных значений минимальной мощности  $W_{01}$  и постоянной максимальной мощности  $W_{02} = 3000$  Вт (3500 Вт, 4236 Вт)

Стены здания выполнены из ячеистых блоков  $\delta = 0,75$  м,  $c = 0,84$  кДж/(кг $^{\circ}$ С);  $\rho = 1000$  кг/м $^3$ ;  $\lambda = 0,31$  Вт/(м $^{\circ}$ С). Постоянная времени  $T = 54$  ч. Из рис. 1 видно, что функционал,  $I$ , оценивающий количество теплоты, израсходованной системой отопления, имеет наименьшие значения в области, когда тепловая мощность на первом промежутке времени минимальна, а на втором – максимальна. Такой же результат подтверждается сечениями поверхности критерия  $I$ . На рис. 2 приведены три сечения критерия  $I$  при  $W_{01} = 0$  Вт. На рис. 3 приведено три сечения функционала  $I$  при  $W_{02} = 3000$  Вт,  $W_{02} = 3500$  Вт,  $W_{02} = 4236$  Вт.

По вышеизложенному методу был спроектирован оптимальный режим прерывистого отопления для ранее рассмотренного здания [13, 14].

На рис. 4 и 5 приведены зависимости продолжительности времени отключения и включения системы отопления и температуры внутреннего воздуха для различных параметров наружного воздуха; продолжительность нерабочего времени составляет 15 часов – с 18 $^{00}$  до 9 $^{00}$ , что характерно для общественных зданий.

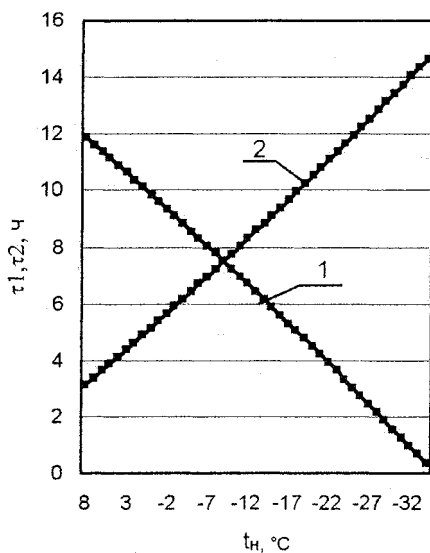


Рис. 4. Продолжительность времени отключения (кривая 1) и включения (кривая 2) системы отопления 4

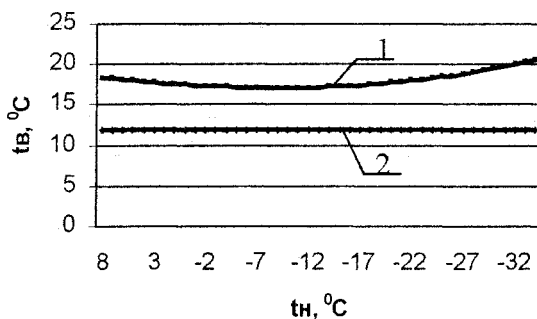


Рис. 5. Значения фактической (кривая 1) и допустимой (кривая 2) температур внутреннего воздуха

В течение периода времени  $\tau_1$  мощность системы отопления снижается в данном случае до  $W_{01} = 0$  Вт, а затем в течение периода  $\tau_2$  происходит разогрев (натоп) здания с максимальной мощностью системы отопления равной расчетной. Как видно из рис. 5, температура внутреннего воздуха не опускается ниже 12  $^{\circ}$ С, что согласуется с нормами [15].

Рис. 6 и 7 иллюстрируют случай, когда заданное здание подключено к тепловым сетям и производится качественное центральное регулирование отпуска тепла на источнике, т.е. мощность, необходимая для разогрева здания, является функцией температуры наружного воздуха.

Из рис. 6 и 7 видно, что при качественном регулировании, рассчитанном конкретно для данного здания, применять прерывистое отопление нецелесообразно. Это объясняется тем, что для натопа, следующего за периодом отключения, нет резерва тепловой мощности, теплота, поставляемая тепловыми сетями практически полностью расходуется на компенсацию теплотерь. Применение режима прерывистого отопления при централизованном теплоснабжении возможно в следующих случаях:

1) если здание более «теплое», т.е. имеет повышенные коэффициенты сопротивления теплопередаче ограждающих конструкций, по сравнению с типовыми зданиями. В этом случае появляется некоторый резерв тепловой мощности, необходимый для осуществления натопа здания;

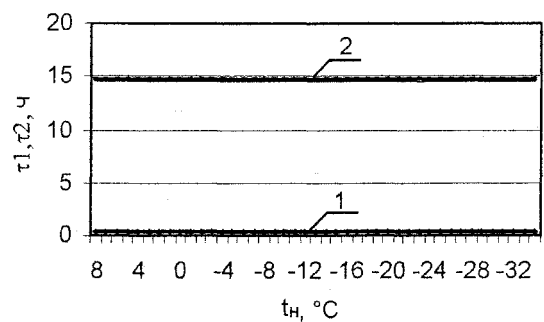


Рис. 6. Продолжительность времени отключения (кривая 1) и включения (кривая 2) системы отопления

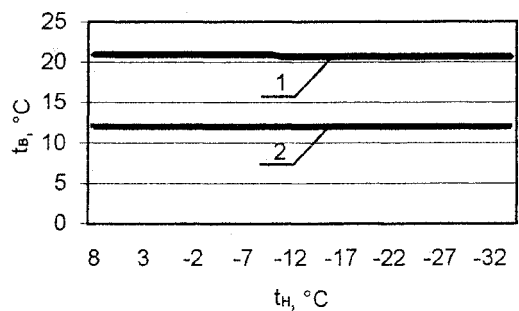


Рис. 7. Значения фактической (кривая 1) и допустимой (кривая 2) температур внутреннего воздуха

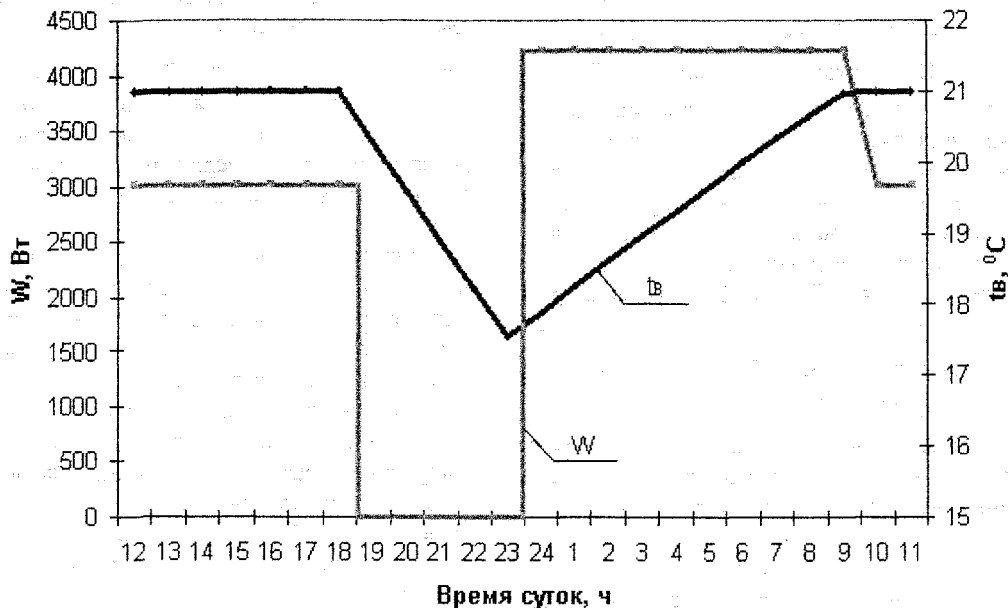


Рис. 8. Изменение мощности системы отопления и температуры внутреннего воздуха при оптимальном управлении

2) если есть возможность отказаться от смешения теплоносителей в период разогрева здания. Это не противоречит санитарно-гигиеническим требованиям, предъявляемым к температуре поверхности отопительных приборов, так как натоп здания происходит в нерабочее время.

Выяснили, какой режим является более экономичным: режим прерывистого отопления или режим централизованного теплоснабжения при качественном регулировании на источнике [13, 14]. Для этого нашли количество теплоты, израсходованное системой отопления за нерабочий период времени из уравнения (2).

Расчеты проводились для указанного здания при температуре наружного воздуха минус 18°C.

Для режима прерывистого отопления из рис. 4 видно, что продолжительность отключения системы отопления составляет 5,04 часа, тогда, как это следует из того же рисунка, продолжительность натопа здания при мощности  $W_0^{\max} = 4236$  Вт равна 9,96 часа. График оптимального управления отоплением приведен на рис. 8. Расход теплоты за нерабочее время при оптимальном прерывистом режиме отопления определяется по формуле (2) и составляет:

$$I = 0,5,04 + 4236 \cdot 9,96 = 42190,56 \text{ Вт}\cdot\text{ч.}$$

Если бы здание отапливалось по обычному качественному графику при тепловой мощности  $W_0 = 3004$  Вт, то расход теплоты был бы равен:

$$I = 3004 \cdot 15 = 45060 \text{ Вт}\cdot\text{ч.}$$

Следовательно, в режиме прерывистого отопления достигается экономия теплоты 2870 Втч, что составляет 6,4 %.

## Литература

1. Панферов, В.И. Моделирование и управление тепловым режимом зданий / В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина // *Материалы Международ. научно-практ. конф. «Теоретические основы теплогазоснабжения и вентиляции»* сборник. - М.: МГСУ/2005. - С. 94-98.
2. Панферов, В.И. Идентификация и управление тепловым режимом зданий / В. И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина // *Вестник ГОУ ВПО УГПУ-УПИ «Строительство и образование», № 14(66)*. - Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. - 2005. - С. 351-353.
3. Панферов, В.И. Математическая модель теплового режима зданий: Энергетики и металлургии настоящему и будущему России / В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина // *Тез. докл. 5-й Всероссийской научно-техн. конф.* - Магнитогорск: МГТУ, 2004.
4. Панферов, В.И. Минимизация затрат энергии в процессе разогрева помещения при прерывистом отоплении / В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина // *Материалы Юбилейной XIV Международной научно-технической конференции «Достижения науки - агропромышленному производству»*. Сборник трудов. - Челябинск: ЧГАУ, 2006 — 4.4.
5. Сканава, А.Н. Отопление / А.Н. Сканава, Л.М. Махов. - М. Издательство АСВ, 2002.-546 с.
6. Табунчиков, Ю.А. Минимизация расхода энергии, затрачиваемой на натоп помещения / Ю.А. Табунчиков, М.М. Бродам // *Издательство вузов. Строительство и архитектура.-!* 988-№ 12-С. 84-87
7. Табунчиков, Ю.А. Экспериментальное исследование оптимального управления расходом

энергии / Ю.А. Табунчиков, М.М. Бродач // АВОК. - 2006. - М. - С. 32-36.

8. Панферов, В.И. Анализ экономических способов нагрева металла в методических печах / В.И. Панферов, Б.Н. Парсункин, Е.В. Торопов // Автоматическое управление металлургическими процессами: Межвузовский сб. научн. трудов. - Магнитогорск: МГМА им. Г.И. Носова, 1996. - С. 63-72.

9 Панферов, В.И. О принципе экономичного управления нагревом металла и его реализации в методических печах // Труды III Международной науч.-практ. конф.: «Металлургическая теплотехника: история, современное состояние, будущее. К столетию со дня рождения М.А. Глинкова.-М.: МИСиС, 2006. - С. 467-470.

10. Теория автоматического управления: Нелинейные системы управления при случайных воздействиях: Учебник для вузов/ А.В. Нетушил, А.В. Балтрушевич, В.В. Бурляев и др.; под ред. А.В. Нетушила. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Высш. школа, 1983. - 432 с.

11. Современные принципы управления сложными объектами/ Л.А. Растринин- М. Сов. Радио, 1980. - 232 с.

12. Панферов, В.И. Оптимизация режима прерывистого отопления /В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина // Проблемы теплоэнергетики. Материалы Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. — Челябинск: Издательство ЮУрГУ, 2006. - 52 с.

13. Панферов, В.И. Экономия тепловой энергии при различных режимах прерывания отопления/ В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина// Энергетики и металлургии настоящему и будущему России: тез. Докл. 7-й Всероссийской научно-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых. - Магнитогорск: МГТУ, 2006. - 188 с.

14. Панферов, В.И. Оптимальный режим прерывистого отопления/ В.И. Панферов, А.Н. Нагорная, Е.Ю. Пашина /I Материалы Пятой Российской научно-технической конференции «Энергосбережение в городском хозяйстве, энергетике, промышленности». - Ульяновск: УлГТУ, 2006. - Том 1 - 236 с.

15. СНиП 41-01-2003 «Отопление, вентиляция и кондиционирование», Госстрой России, 2004.

**Панферов Владимир Иванович** - д.т.н., профессор, зав. кафедрой «Теплогазоснабжение и вентиляция» ЮУрГУ.

Область научных интересов: моделирование и оптимизация теплотехнических процессов и систем, автоматизация технологических объектов.

**Анисимова Елена Юрьевна** - аспирант и ассистент кафедры «Теплогазоснабжение и вентиляция», ЮУрГУ

Область научных интересов: моделирование и оптимизация тепловых режимов.

**Нагорная Анастасия Николаевна** - аспирант и ассистент кафедры «Теплогазоснабжение и вентиляция», ЮУрГУ.

Область научных интересов: моделирование и оптимизация тепловых режимов.