

ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ СРЕД В ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ РЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

И.В. Елюхина

Путем численного моделирования экспериментов изучены особенности течения нелинейно вязких и вязкопластичных сред в осциллирующих реометрических системах на примерах крутильно-колебательного вискозиметра в режиме затухающих колебаний и вибрационного вискозиметра в режиме вынужденных колебаний.

Введение

При планировании корректных экспериментов по идентификации реологической принадлежности жидкостей и определения их параметров необходимо учитывать особенности течения сред различных реологических типов. Рассмотрим подробнее два типичных нестационарных случая: затухающие колебания крутильно-колебательного вискозиметра (рис. 1) и вынужденные колебания вибрационного вискозиметра (рис. 2) (см., например, [1]).

В подобных периодических течениях на практике обычно реализуются случаи, когда полная деформация остается сколь угодно малой, хотя ее мгновенная скорость может быть высокой. В этом случае состояние простой жидкости с затухающей памятью можно охарактеризовать как линейное вязкоупругое, а течение описать единственной материальной функцией - комплексной вязкостью. В этом случае для установившегося режима вискозиметрические уравнения могут быть получены аналитически, и в детальном изучении локальных особенностей течений таких сред нет необходимости. Поэтому далее остановимся на рассмотрении течений неньютоновских жидкостей, в реологические уравнения состояния которых входят нелинейно вязкие или вязкопластичные составляющие.

Математическая формулировка задачи

Крутильно-колебательный метод

Математическую модель эксперимента для случая длинного цилиндра в цилиндрической системе координат представим в следующем виде:

1) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial \sigma_{\xi\varphi}}{\partial \xi} + \frac{2\sigma_{\xi\varphi}}{\xi}, \quad (1)$$

2) уравнение движения цилиндра

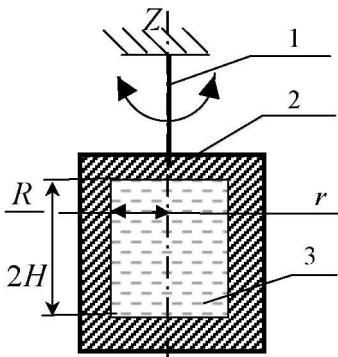


Рис. 1. Схема метода:

1 - упругая нить; 2 - цилиндр, совершающий затухающие крутильные колебания вокруг своей оси; 3 - исследуемая жидкость

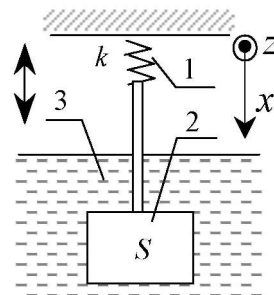


Рис. 2. Схема метода:

1 - упругий элемент; 2 - пластина, совершающая плоские колебания под действием гармонич. силы; 3 - исследуемая жидкость

$$\frac{d^2 \alpha}{dT^2} + 2\Delta_0 \frac{d\alpha}{dT} + \alpha = P, \quad (2)$$

3) начально-краевые условия для (1), (2):

$$U(\xi, 0) = 0, \quad U(\xi_0, T) = \frac{d\alpha}{dT} \xi_0, \quad U(0, T) = 0, \quad \alpha(0) = \alpha_0 \sim 6^\circ, \quad \left. \frac{d\alpha}{dT} \right|_{T=0} = 0. \quad (3)$$

4) реологическое уравнение состояния

4.1) для ньютоновской среды

$$\sigma_{\xi\varphi} = D_{\xi\varphi}, \quad (4)$$

4.2) для нелинейно вязкой среды по модели Оствальда-Вейля (см., например, [2])

$$\sigma_{\xi\varphi} = b D_{\xi\varphi} D^{m-1}, \quad (5)$$

4.3) для вязкопластической среды по модели Бингама (см., например, [3])

$$\sigma_{\xi\varphi} = \begin{cases} (1 + Bm/D) D_{\xi\varphi} & \text{при } D \geq D_0, \\ k_\sigma D_{\xi\varphi} & \text{при } D < D_0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$P = -\frac{4}{\xi_0^2} A \sigma_{\xi\varphi} \Big|_{\xi=\xi_0}, \quad D_{\xi\varphi} = \frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{U}{\xi}, \quad A = \frac{MR^2}{2K}, \quad Bm = \frac{\sigma_0}{\nu \rho q_0}, \quad b = \frac{q_0^{m-1} K_\nu}{\nu \rho}, \quad D_0 = \frac{Bm}{k_\sigma - 1},$$

$$U = V/dq_0, \quad T = q_0 t, \quad \xi_0 = R/d, \quad \xi = r/d, \quad d = \sqrt{\nu/q_0}, \quad q_0 = 2\pi/\tau_0, \quad \Delta_0 = \delta_0/2\pi; \quad (7)$$

t - время, α - угловое смещение цилиндра, α_0 - начальное смещение, R - внутренний радиус цилиндра, d - толщина пограничного слоя, K_ν и m - постоянная и показатель степенного реологического закона, Bm - число Бингама, σ_0 - предел текучести ν , - кинематическая вязкость среды, ρ - плотность среды, $V(r, t)$ - азимутальная компонента скорости, τ_0 - период собственных установившихся колебаний, q_0 - циклическая частота колебаний пустого цилиндра, δ_0 - логарифмический декремент затухания собственных установившихся колебаний, $D_{\xi\varphi}$ - $\xi\varphi$ -я компонента D , D - второй инвариант D , D - тензор скоростей деформации, $\sigma_{\xi\varphi}$ - $\xi\varphi$ -я компонента тензора напряжений; P - момент сил, приложенных к цилиндру со стороны среды, A - отношение моментов инерции среды в цилиндре $0,5MR^2$ и пустой подвесной системы K относительно оси цилиндра, M - масса среды, величины P , M и K отнесены к единице длины цилиндра. Для рассматриваемого течения $D = |D_{\xi\varphi}|$. При моделировании вязкопластического поведения в (6) принята модель bi-viscosity, в которой для лучшего соответствия модели истинному вязкопластичному поведению модельный коэффициент $k_\sigma \sim 10^3$. Затуханием колебаний в отсутствие среды далее пренебрегаем: $\delta_0 = 0$.

Вибрационный метод

Математическую модель вискозиметрических экспериментов представим как

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \cdot k_f; \quad (8)$$

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dT^2} + \bar{x} = \sin \frac{T}{\lambda} + 2A \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_{z=0} \cdot k_{tr}; \quad (9)$$

$$\bar{x} \Big|_{T=0} = 0, \quad \bar{x}(0) = 0, \quad U(\bar{z}, 0) = 0, \quad U(0, T) = y \cdot d\bar{x}/dT, \quad U(\infty, T) = 0; \quad (10)$$

для среды Оствальда-Вейля:

$$k_f = mb \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|^{m-1}, \quad k_{tr} = b \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0}^{m-1}; \quad (11)$$

для среды Бингама:

$$k_f = k_{tr} = k_\sigma - \text{при } \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| < D_0,$$

$$k_f = 1, k_{tr} = \left(1 + Bm \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right|_{z=0} \right) - \text{при } \left| \frac{\partial U}{\partial z} \right| \geq D_0; \quad (12)$$

где $\bar{x} = xk/F$, $T = \omega_0 t$, $\lambda = \omega_0 / \omega$, $\omega_0^2 = k/m_0$, $\bar{z} = z/d$, $d = \sqrt{\nu/\omega_0}$, $A = S\nu\rho\omega_0/F$, $b = \omega_0^{m-1} K_\nu / (\nu\rho)$, $Bm = \sigma_0 / (\nu\rho\omega_0)$, $y = F/(kd)$, $U = V/(d\omega_0)$, $V = V_x$ - скорость колеблющейся пластины, m_0 - масса подвесной системы, k - жесткость упругого элемента, ω и F - частота и амплитуда вынуждающей силы, S - площадь поверхности пластины, x - линейное смещение пластины, z - координата вдоль оси Z , $z = 0$ - на пластине; $\beta = \sqrt{2}Ay$, где β - см. [2]; описание остальных параметров - см. после (7).

Сопряженные задачи о движении зонда и среды (1)-(3), (5) или (6) и (8)-(10), (11) или (12) решены численно. Для решения системы нелинейных уравнений в работе использован метод прямых. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений интегрировалась, в частности, методом Рунге-Кутты четвертого порядка с контролем точности и автоматическим выбором шага по времени, методом Адамса пятого порядка точности в форме Нордсика и пр. Для интегрирования жестких систем, возникающих при определенных условиях эксперимента, был использован метод Гира шестого порядка точности. Производные по координате аппроксимировались разностными отношениями с пятью узловыми точками, обеспечивающими точность порядка четвертой степени шага по координате.

Результаты и обсуждение

Нелинейно вязкие среды

Рассмотрим простейший тип осциллирующего течения - на пластине. Для нелинейно вязких сред можно выделить два вида течения: при вязкости больше и меньше ньютоновской, в зависимости от чего граница области развитого течения приближается или удаляется от пластины по сравнению с ньютоновской (рис. 3 - для дилатантной среды). Это объясняется тем, что глубина проникновения пропорциональна кажущейся вязкости bD^{m-1} , определяемой отношением напряжения и скорости сдвига, которая для дилатантных сред при данных условиях эксперимента (когда $D < 1$) падает с ростом m и при уменьшении D . Так, рис. 3б соответствует малым D ($|D'_0| < 0.1$, где $D'_0 = D'|_{z=0}$, D' - скорость сдвига). Кривая течения для $m = 2$ на рис. 3а проходит ниже прямой для ньютоновской среды с $m = 1$, и граница области, где $U \sim 0$, находится ближе к пластине для среды с $m = 2$. При $\beta = \text{const}$ с ростом y , т.е. с ростом, например, амплитуды вынуждающей силы F , расширяется интервал значений скорости сдвига, проходимых в процессе колебаний, и при $|D'_0| \gg 1$ граница находится существенно дальше от пластины, чем для ньютоновской жидкости. На практике это может означать, что предположение о безграничности среды уже не допустимо и влиянием стенок пренебрегать нельзя.

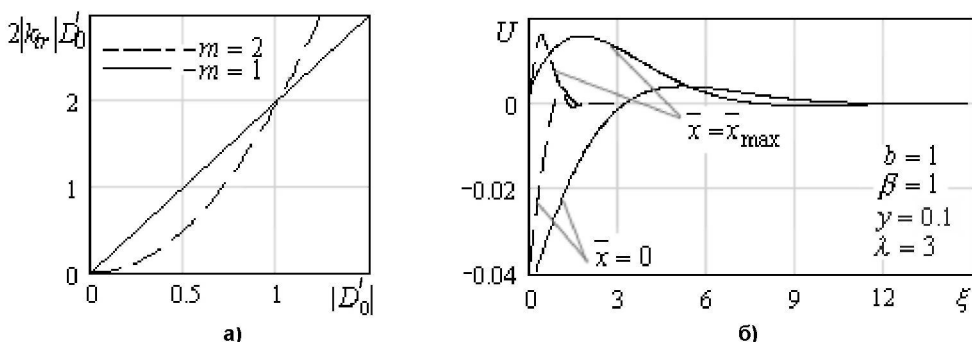


Рис. 3. К зависимости $U=U(\xi)$ для дилатантной среды при малых скоростях сдвига

На частотных спектрах напряжения и скорости сдвига на пластине (рис. 4), построенных для режима установившихся колебаний, выявлено появление нечетных гармоник вынуждающей силы, обнаруженных ранее в [4] в упрощенной модели с сосредоточенными параметрами. Распределение интенсивностей пиков спектра, в т.ч. вид их огибающей, определяется нелинейными свойствами жидкости и условиями эксперимента, что позволяет исследовать свойства таких сред в рамках Фурье реологии.

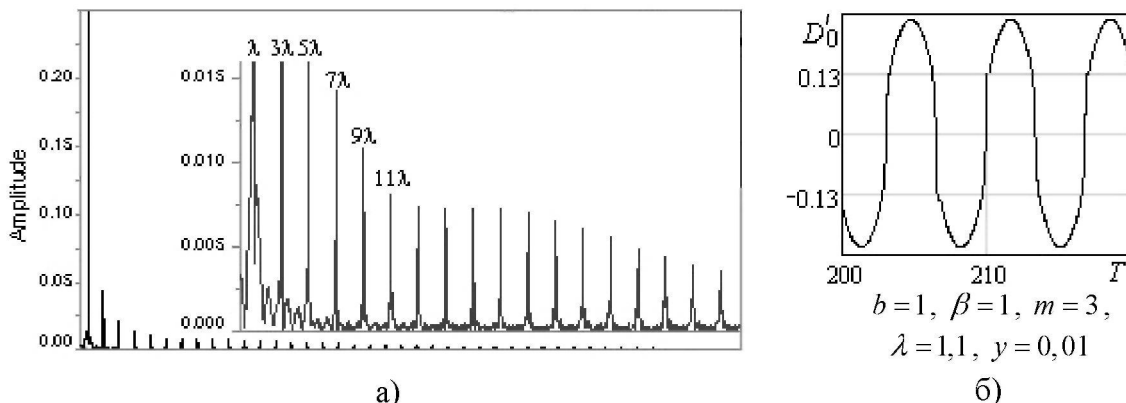


Рис. 4. Спектр (а) и зависимость скорости сдвига (б) на пластине от времени

Данные особенности наблюдаются и при течении в крутильно-колебательном вискозиметре. Заметим, что в т.ч. при малых скоростях сдвига, реализуемых в режиме затухающих колебаний, среды с $m > 1$ относятся к дилатантным, а с $0 < m < 1$ - к псевдопластичным. При численном моделировании с учетом того, что для дилатантных сред область развитого течения находится вблизи стенки цилиндра, расчеты необходимо проводить в интервале $\xi \in [\xi_1, \xi_0]$, где ξ_1 определяется как $U(0 \dots \xi_1, T) \sim 0$, а для псевдопластичных - в ряде случаев брать большее число точек у оси цилиндра.

Вязкопластичные среды

При заполнении крутильно-колебательного вискозиметра вязкопластичной средой около оси цилиндра всегда присутствует твердое ядро (зона 1 на рис. 5), где сдвиговые напряжения не превосходят предел текучести. Также в потоке имеется тонкая твердотельная прослойка (зона 2 на рис. 5), возникающая у поверхности цилиндра, перемещающаяся в процессе колебания к ядру, граница которого движется в это время от центра, и при достижении ядра сливающаяся с ним (рис. 5-7). В таких зонах скорость U по координате ξ изменяется линейно: $dU/d\xi - U/\xi = 0$, и, в частности, в случае развитого по всему сечению твердотельного течения $U(\xi, T) = d\alpha/dT \cdot \xi$. Застойным зонам соответствуют прямолинейные участки, начиная от $\xi = 0$, на рис. 6, 7 (зона 1) и искривление профиля скорости сдвига при смене знака D^i на рис. 7 (зона 2); это области с $|D^i| < D_0$ на рис. 5.

Расчет по идеальной модели для вязкопластичной среды (т.е. когда $\sigma_{\xi\varphi} = D_{\xi\varphi} = 0$ при $|\sigma_{\xi\varphi}| < \sigma_0$ в (6) и пр.), так же как и учет конечной длины цилиндра, значительно усложняет численные формулировки, в т.ч., существенно повышая время расчета, и в то же время не обеспечивает требуемой точности и в ряде случаев сходимости к истинному решению. Так, например, численные модели, основанные на определении на каждом временном слое радиуса твердого ядра вязкопластического течения аналогично выполняемому при стационарных течениях, к примеру, в капиллярной реометрии, не позволяют корректно промоделировать твердотельные прослойки, наличие которых изменяет напряжение на стенке цилиндра, внося часто существенные ошибки в закон колебаний. Использование модели bi-viscosity здесь дает удовлетворительные результаты: при $k_\sigma \sim 10^3 \dots k_\sigma \sim 10^4$ расхождение в рассчитанных значениях составляет менее 0,1 %.

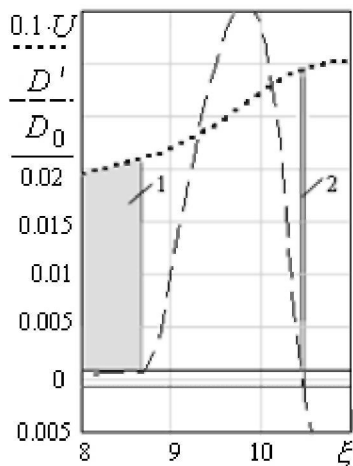


Рис. 5. Зависимости $U=U(\xi)$ и $D'=D'(\xi)$

— застойные зоны

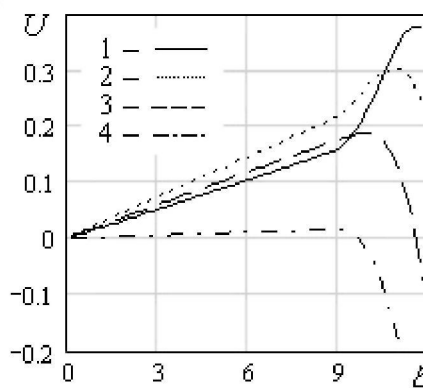


Рис. 6. Зависимость $U=U(\xi)$

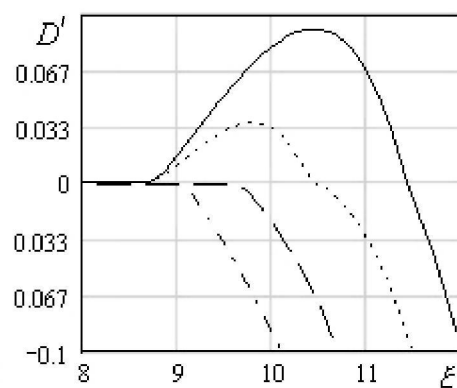


Рис. 7. Зависимость $D'=D'(\xi)$

$\xi_0 = 12$. $A = 0.2$. $Bm = 0.4$:

Кривые 1-4 соответствуют моментам времени в течение 1-й четверти полупериода (крив. 1, 2) и 2-й четверти (крив. 3, 4)

При течении в вибрационном вискозиметре при значениях \bar{z} , прилегающих к правой границе расчетной области, образуется неподвижная твердотельная зона, а вязкопластическое течение перемежается твердотельными прослойками (обычно 1-й - 2-мя). Для такой жидкости характерен рост области развитого течения по сравнению с ньютоновской (т.е. смещения расчетной границы $U(\infty, T) = 0$ в (10)) вследствие увлечения жидкости твердыми прослойками, что качественно согласуется с результатами для псевдопластичных сред.

Заключение

В работе обсуждены особенности, на которые следует обращать внимание при численном моделировании экспериментов по идентификации реологической принадлежности и свойств неньютоновских сред - нелинейно вязких (модель Оствальда-Вейля) и вязкопластичных (модель Бингама). Так,

- 1) выявлен рост области развитого течения для вязкопластичных и псевдопластичных жидкостей и уменьшение этой области для дилатантных сред;
- 2) проанализирована динамика развития твердотельных зон в процессе затухания крутильных колебаний,
- 3) установлено появление нечетных гармоник вынуждающей силы на спектрах напряжения и скорости сдвига на пластине;
- 4) выполнены рекомендации по численным расчетам таких течений в осциллирующих реометрических системах.

Литература

1. Елюхина И.В., Вяткин Г.П. Параметрическая идентификация нелинейно вязких свойств жидкостей вибрационным методом затухающих колебаний// Вестник ЮУрГУ. Серия «Машиностроение». - 2005. - Вып. 6.-№ 1 (41). - С. 6-11.
2. Balmforth N.J., Craster R.V. A consistent thin-layer theory for Bingham plastics// J. Non-Newtonian Fluid Meek, 1999. -№ 84. P. 65-81.
3. Fang P., Manglik R.M., Jog M.A. Characteristics of laminar viscous shear-thinning fluid flows in eccentric annular channels// J. Non-Newtonian FluidMech., 1999. -№ 84. P. 1-17.
4. Wilhelm M., Maring D., Spiess H.-W. Fourier-transform rheology//Rheol. Acta, 1998. -№37. - P. 399-405.