УДК 532.137.3

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКИХ СВОЙСТВ ЖИДКОСТЕЙ ВИБРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

И.В. Елюхина, Г.П. Вяткин

Обсуждены возможности наблюдения и идентификации реологических свойств нелинейно вязких жидкостей (модель Оствальда-Вейля) вибрационным методом в режиме затухающих колебаний при отсутствии вынуждающей силы. Для ньютоновских сред для такого режима построено вискозиметрическое уравнение.

Введение

Неньютоновские жидкости являются основными рабочими средами в разнообразных технологических процессах. Сложные реологические свойства смазок, масел и других нефтепродуктов зачастую существенно влияют на их поведение в условиях эксплуатации, а корректные физически обоснованные оценки свойств позволяют обеспечивать нормальные и надежные режимы функционирования. Большинство экспериментов по изучению реологических свойств таких труднодоступных для исследования сред как, например, высокотемпературные и химически агрессивные жидкости, интерпретировано в предположении о ньютоновском характере их течения, что может приводить к противоречиям в величине вязкости и характере ее зависимости от термодинамических параметров. Ранее авторами [1] были изучены возможности наблюдения неньютоновских свойств в экспериментах с крутильным вискозиметром. Другим таким методом является вибрационный [2], в котором о реологических свойствах жидкости судят по параметрам вынужденных колебаний погруженной в эту среду пластины.

Помимо возможности работы с агрессивными средами, указанные выше нестационарные методы объединяют реализуемые в них условия, позволяющие сделать наблюдаемыми отдельные неньютоновские эффекты у жидкостей, обычно считающихся ньютоновскими, и решить задачу о реологической принадлежности среды. Так, для этих методов характерно изменение во времени приращений напряжений и деформаций, что делает возможным обнаружение, например, упругих свойств жидких сред или свойств текучих систем с переменным отношением между напряжением и скоростью сдвига. В режиме затухающих колебаний можно реализовать как предельно малые полные деформации, так и малые скорости деформаций, и обнаружить, в частности, слабопластичные свойства. К тому же, здесь вывод о реологической принадлежности среды делается на основе измерений параметров колебаний, которые могут быть выполнены с высокой точностью, недоступной для наблюдаемых параметров в других методиках.

Течения, возбуждаемые в неньютоновских средах осциллирующей в своей плоскости пластиной, уже давно привлекают внимание исследователей. Все эти работы, однако, посвящены решению несопряженной задачи, когда закон движения пластины задан, например, гармонической функцией времени, и относятся главным образом к вязкоупругим жидкостям: средам Олдройда-Б, Джонсона-Сигельмана, а также средам Ривлина-Эриксона 2-го, 3-го порядков и пр. (см., например, [3-5]). Методики же оценивания свойств неньютоновских сред вибрационным методом отсутствуют. К настоящему времени известны результаты, касающиеся, помимо ньютоновской, только простейших типов вязкоупругих сред, например, линейных, т.е. когда можно достаточно легко получить аналитическое выражение для закона колебаний пластины в регулярном установившемся режимах. Для неньютоновских сред этот закон в общем случае отличен от гармонического.

К тому же вибрационный метод развит для режима вынужденных колебаний. Возможность его использования в режиме свободных затухающих колебаний отмечена, в частности, в [2] в связи с измерением свойств ньютоновских сред с малыми вязкостями, но корректное обоснование расчетных соотношений отсутствует. В настоящей работе исследуем зависимость параметров колебаний от свойств среды для ньютоновских жидкостей, а также возможности метода затухающих колебаний по идентификации реологической принадлежности и свойств неньютоновских сред на примере нелинейно вязких со степенным реологическим законом.

Математическая формулировка задачи

Математическую модель вискозиметрических экспериментов представим в виде:

1) уравнение движения пластины

$$\frac{d^2\bar{x}}{dT^2}+\bar{x}=-\bar{F}_{mp}, \tag{1}$$

2) уравнение движения жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial T}=\frac{\partial\bar{\sigma}_{\bar{z}\bar{x}}}{\partial\bar{z}}, \tag{2}$$

3) начально-краевые условия для (1,2)

$$d\bar{x}/dT\Big|_{T=0}=0,\ \bar{x}(0)=\bar{x}_0,\ U(\bar{z},0)=0,\ U(0,T)=d\bar{x}/dT,\ U(\infty,T)=0, \tag{3}$$

4) реологическое уравнение состояния

4.1) для ньютоновской среды

$$\bar{\sigma}_{\bar{z}\bar{x}}=\partial U\big/\partial\bar{z}, \tag{4}$$

4.2) для нелинейно вязкой среды (по модели Оствальда-Вейля)

$$\bar{\sigma}_{\bar{z}\bar{x}}=b\,\partial U\big/\partial\bar{z}\left|\partial U\big/\partial\bar{z}\right|^{m-1}, \tag{5}$$

где
$$b=\omega_0^{m-1}K_v/(\nu\rho),\ x=x/d,\ T=\omega_0 t,\ \lambda=\omega_0/\omega,\ \omega_0^2=k/m_0,$$
$$\bar{z}=z/d,\ d=\sqrt{\nu/\omega_0},\ A=Sd\rho/m_0,\ U=V/(d\omega_0), \tag{6}$$

$\bar{\sigma}_{\bar{z}\bar{x}}$ – $\bar{z}\bar{x}$ -я компонента тензора напряжений, $\bar{F}_{mp}=-2A\bar{\sigma}_{\bar{z}\bar{x}}\Big|_{\bar{z}=0}$ - действующая на пластину сила трения, $V=V_x$ - скорость колеблющейся пластины, d - толщина пограничного слоя, m и K_v - показатель и постоянная степенного реологического закона, S - площадь поверхности пластины, m_0 - масса подвесной системы, t - время, ν - кинематическая вязкость, p - плотность, x - линейное смещение пластины, $\bar{x}_0$ - начальное смещение, κ - жесткость пружины; ось Z ортогональна плоскости пластины, z = 0 - на пластине; система (1)-(3), (5) решается численно; затуханием колебаний в отсутствие среды и краевыми эффектами пренебрегаем.

Результаты и обсуждение

Ньютоновские среды

Сначала рассмотрим частный случай ньютоновской среды, когда b $=m=1$. Разыскивая закон колебаний пластины в виде

$$\bar{x}=\bar{x}_0\exp\left[-iT(\theta-\Delta i)\right], \tag{7}$$

из решения системы (1)-(4) найдем зависимость для определения параметров колебаний

$$\left[1-(\theta-\Delta i)^2\right]-2A\sqrt{i}\,(\theta-\Delta i)^{3/2}=0, \tag{8}$$

где $\theta=\omega/\omega_0=1/\lambda$, $\Delta=(\delta/(2\pi))\cdot\omega/\omega_0$ - коэффициент затухания, δ - логарифмический декремент затухания колебаний, $\omega=2\pi/\tau$ и $\omega_0=2\pi/\tau_0$ - частоты колебаний пластины с жидкостью и без нее, m и m_0 - соответствующие периоды колебаний, $i=\sqrt{-1}$.

Для ньютоновской среды параметры колебаний *в* и А не зависят от начальной амплитуды колебаний x_o и определяются одним параметром A (рис. 1). Высокие значения *8* ограничивают интервал целесообразных значений A, например, до $A < 0.1$.

Рис. 1. Зависимость параметров колебаний от условий эксперимента для ньютоновских сред

Нелинейно вязкие среды

Установившиеся колебания пластины, погруженной в ньютоновскую жидкость, являются изосинхронными. Для неньютоновских сред возможно нарушение подобного асимптотического режима. В дальнейшем под периодом колебаний будем понимать величину $\tau = 2\Delta T_\tau$, где ΔT_τ – разность между двумя соседними моментами времени, когда $\bar{x}$ обращается в нуль, а декремент затухания определим как $\delta = 2\ln\left|\bar{x}_1/\bar{x}_2\right|$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ - соседние экстремальные значения x ($\left|\bar{x}_1\right| > \left|\bar{x}_2\right|$).

Зависимость поведения параметров колебаний от времени, т.е. от номера колебания N, при различных условиях эксперимента и свойствах среды продемонстрирована на рис. 2, 3 при $\bar{x}_0 = 1$. Видно, что для жидкостей с $m > 1$ значения периода и декремента затухания падают в процессе колебаний, а для жидкостей с $m < 1$ - растут. Эти качественные особенности можно пояснить следующим образом. Согласно вискозиметрическому уравнению (8) для $m = 1$ значения λ и δ растут с ростом A. Для нелинейно вязкой среды в качестве параметра A может принять $A_{\text{нв}} = A\sqrt{bD^{m-1}}$, где $D = \left|\partial U/\partial \bar{z}\right|$ - второй инвариант тензора скоростей деформации. В процессе колебаний усредненное по полупериоду значение D падает, и кажущаяся вязкость bD^{m-1} уменьшается, т.е. значение $A_{нв}$ для дилатантных сред ($m > 1$) падает, а для псевдопластичных ($m < 1$) - растет. Соответствующим образом с течением времени изменяются и параметры коле-

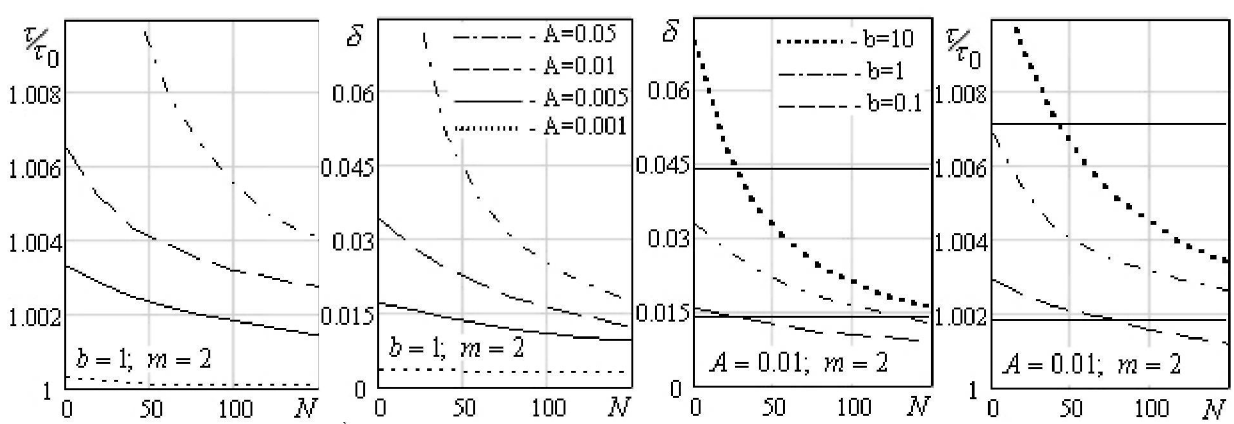

Рис. 2. Изменение параметров колебаний в процессе их затухания при различных значениях параметров A (а) и b (б)

баний τ и δ. Для $m=1$ значение $A_{нв}$, а, следовательно, и значения τ, δ „ остаются постоянными в процессе колебаний. Напомним, что зависимость (8) не учитывает переходные процессы, описывая регулярный режим колебаний. Для ньютоновской жидкости при $b \neq 1$ параметры колебаний определялись из (8) с учетом соотношений для b и A (6).

Горизонтальные линии на рис. 2b, 3 соответствуют аналитическому решению для ньютоновской среды (при b = 1 - верхняя линия и при b = 0.1 - нижняя линия на рис. 2b). При b = 1 кривые $\tau = \tau(N)$ при одном и том же τ_0 и различных m стремятся при $N \to 1$ к одному значению τ. Это позволяет определить A из зависимости (8) как при $m = 1$ и оценить K_v в предположении b = *1*. При $b < 1$ значения параметров колебаний при $N \to 1$ для нелинейно вязких сред выше,

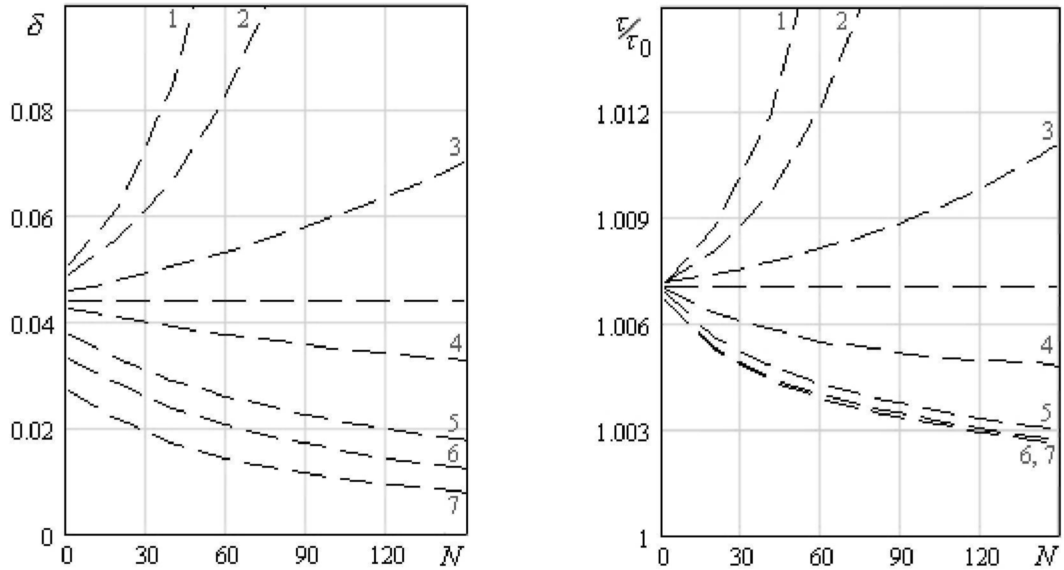

Рис. 3. Изменение параметров колебаний в процессе их затухания при различных показателях степенного реологического закона b = 1, A = 0,01;
1 - τ = 2/3; 2 - τ = 3/4; 3 - τ = 0,9; 4 - τ = 1,1;
5 - τ = 3/2; 6 - m = 2 ; 7 - m = 3

чем для ньютоновской жидкости, а при b > 1 - ниже (для параметров рис. 2б при 6 = 10 из (8) для ньютоновской среды получаем $\delta \sim 0{,}137$ и $\tau/\tau_0 \sim 1{,}0225$).

Показатель степенного реологического закона можно найти из исследования асимптотических значений δ и τ/τ_0 при $N \to \infty$ (в частности, можно принять N = 150), когда изменение параметров колебаний во времени уже мало и не вносит значительной ошибки ввиду недостаточной точности измерения их на практике для отдельного колебания. Этот способ подробнее был обсужден на примере крутильно-колебательного вискозиметра (см., например, [6]). Дополнительный способ оценивания реологических свойств среды вибрационным методом по сравнению, например, с аналогичным в этом отношении крутильно-колебательным методом, основан на изучении зависимости поведения параметров колебаний от времени при различных начальных амплитудах колебаний $\bar{x}_0$. Повторим, что для ньютоновской среды θ и δ в установившемся регулярном режиме колебаний при различных $\bar{x}_0$ и заданном A одинаковы.

Ниже подробнее остановимся на одном из способов предварительной оценки b и m по значениям $\lambda_1 = 1/\theta|_{N\to1}$ и $\delta_1 = \delta|_{N\to1}$ для сред с $m > 1$.. Кривые, демонстрирующие изменение λ_1 δ_1 в зависимости от свойств среды, приведены на рис. 4 и построены с учетом переходных процессов, реализуемых при начальных условиях (3). Характер поведения параметров колебаний в зависимости от m при различных $\bar{x}_0$ определяется типом среды при этих условиях, и, в частности, величиной эффективной вязкости, зависящей от модуля скорости сдвига. Выполняя эксперименты при фиксированном значении $A = 0.01$, по рис. 4 можно оценить b и m.

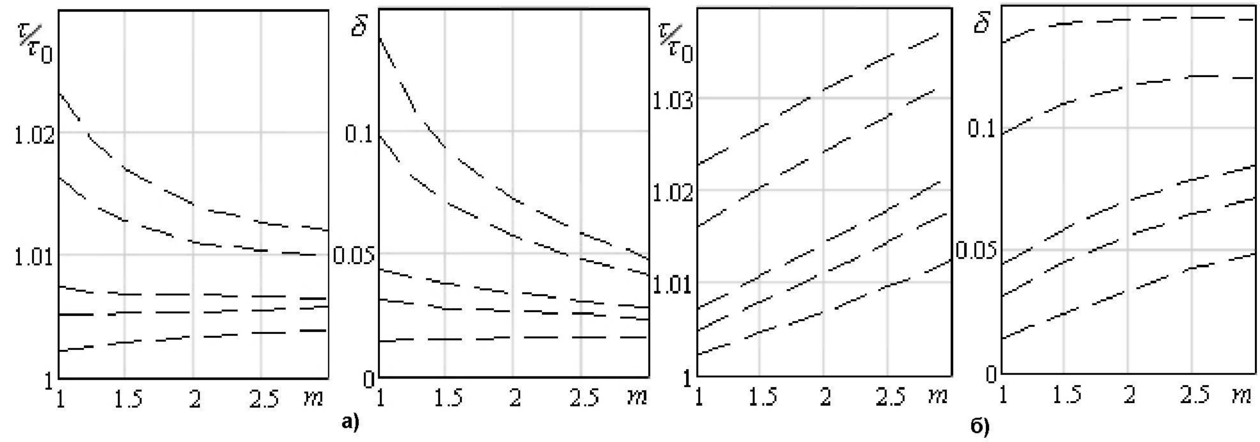

Рис. 4. Параметры колебаний λ_1 и δ_1 при различных свойствах среды
A = 0,01; $\bar{x}_0$ = 1 (а) и $\bar{x}_0$ = 10 (б); кривые: сверху вниз b = 10; 5; 1; 0,5; 0,1

Полученные значения b и m необходимо уточнить путем сравнения полных зависимостей параметров колебаний от времени в процессе колебаний $\delta = \delta(N)$ и $\lambda = \lambda(N)$, т.е. путем минимизации функции качества, являющейся критерием соответствия экспериментальных и расчетных данных, построенной, например, по методу наименьших квадратов:

$$f(m,b) = \sum_{l=1}^{N} (y_{pl} - y_{эl})^2 , \tag{9}$$

где y_{pl} и $y_{эl}$ - расчетные и экспериментальные значения измеряемых в эксперименте величин (т.е. δ и τ/τ_0), - номера экспериментальных точек. Функция (9) имеет криволинейный овраг на плоскости *(m, b),* и поэтому необходимо использовать овражные методы поиска, имеющие нелокальный характер. В общем случае можно принять вектор $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{x}}$, т.е. рассматривать соответствие экспериментального и расчетного закона колебаний. Для повышения точности измерения нелинейных свойств выбор оптимальных параметров колебаний (и установки) определяется из условия

$$\sum_{l=1}^{N} \sqrt{\left(\partial y_l / \partial b\right)^2 + \left(\partial y_l / \partial m\right)^2} \rightarrow \max , \tag{10}$$

и при равенстве дисперсий в различных экспериментальных точках берется максимально возможное число точек замера.

Заключение

Итак, в настоящей работе

1) для ньютоновских сред для режима установившихся колебаний построено вискозиметрическое уравнение, связывающее вязкость жидкости с измеряемыми в эксперименте параметрами: периодом и декрементом затухания колебаний;

2) обсуждено решение проблемы идентификации реологической принадлежности жидкостей как нелинейно вязких со степенным реологическим законом на примере модели Оствальда-Вейля. В условиях, свойственных вибрационному методу затухающих колебаний, выявлены эффекты, связанные с таким поведением среды;

3) предложен один из возможных способов оценивания неизвестных реологических свойств нелинейно вязких сред по наблюдаемым в эксперименте периоду и декременту затухания колебаний.

Литература

1. Елюхина И.В., Вяткин Г.П., Бескачко В.П. Новые возможности крутилъно-колебателъного метода Швидковского Е.Г.: идентификация реологической принадлежности среды// Вестник ЮУрГУ. Серия «Математика, физика, химия». - 2003. - Вып. 3. - № б (22). - С. 108-115.

2. Соловьев А.Н., Каплун А.Б. О вибрационном методе измерения вязкости жидкостей// АН СССР. Теплофизика высоких температур. - 1965. -Т. 3. -№ 1. - С. 139-148.

3. Hayat T., Siddiqui A.M., Asghar S. Some simple flows of an Oldroyd-B fluid// Int. J. ofEng. Science, 2001. -№ 39. P. 135-147.

4. Erdogan M.E. A note on an unsteady flow of a viscous fluid due to an oscillating plane wall// Int. J.Non-linearMeck, 2000. -№ 35. P. 1-6.

5. Foote J.R., Puri P., Kythe P.K. Some exact solutions of the Stokes problem for an elastico-viscous fluid// Acta Meek, 1987. -№ 68. P. 223-230.

6. Елюхина И.В. К оценке постоянной и показателя степенного реологического закона методом крутильных колебаний/ Тез. докл. V Всерос. конф. YM-2004. - Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2004. (Тр. конф. - http://www.ict.nsc.ru/ws/YM2004/8549/yelyukhinal.html).