УДК 681.58

ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Н.В. Плотникова

Любую квазистационарную стохастическую непрерывную систему управления можно описать, используя элементарные звенья второго и первого порядков. Однако коэффициенты и постоянные времени, используемые в каноническом описании, являются комбинациями физических параметров, что затрудняет учет их случайности, поэтому имеет смысл использовать неканоническую форму записи [3].

Как показывают практические исследования [1], в большинстве систем случайными являются один или два физических параметра.

Наряду с традиционными частотными характеристиками для анализа поведения систем широко используются обратные частотные характеристики [4]. При этом квазистационарная стохастическая система описывается семейством частотных характеристик, включающим центральную характеристику - математическое ожидание, две среднеотклоненных и две предельноотклоненных характеристики.

1. Описание квазистационарной стохастической системы с двумя случайными параметрами

Для большинства квазистационарных стохастических систем достаточно ограничиться рассмотрением двух случайных параметров. Такой подход обеспечивает получение несложных аналитических формул.

Рассмотрим квазистационарную стохастическую систему с двумя случайными параметрами. Использование обратных частотных характеристик позволяет достаточно просто учесть случайность параметров, получить описание системы в виде семейства характеристик [3] и оценить показатели качества.

Обратную частотную характеристику $W^{-1}(j\omega)$ можно представить в виде:

$$W^{-1}(j\omega) = q_1A(j\omega) + q_2B(j\omega) + q_1q_2C(j\omega) + D(j\omega), \quad (1)$$

где q_1, q_2 – случайные параметры; $A(j\omega)$, $B(j\omega)$, $C(j\omega)$, $D(j\omega)$ – не содержат случайных параметров. Структуру системы с учетом (1) можно представить в виде схемы (рис. 1).

Выделим в частотной характеристике вещественную и мнимую части:

$$W^{-1}(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega). \quad (2)$$

Обозначим вещественные и мнимые части $A(j\omega)$, $B(j\omega)$, $C(j\omega)$ и $D(j\omega)$ в (1) соответственно через $A_R(\omega),\ldots, D_R(\omega)$ и $A_I(\omega),\ldots, D_I(\omega)$. Тогда выражения для вещественной и мнимой частей примут вид:

$$X(\omega) = q_1A_R(\omega) + q_2B_R(\omega) + q_1q_2C_R(\omega) + D_R(\omega); \quad (3)$$
$$Y(\omega) = q_1A_I(\omega) + q_2B_I(\omega) + q_1q_2C_I(\omega) + D_I(\omega),$$

где $A_R(\omega),\ldots, D_I(\omega)$ в общем случае описываются формулами вида:

$$\begin{cases} F_R(\omega) = \sum\limits_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j f_{n-2j}\omega^{2j}; \\ F_I(\omega) = \sum\limits_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j f_{(n-1)-2j}\omega^{2j+1}, \end{cases} \quad (4)$$

где $f_i = a_i$, $(i = 1,\ldots, n)$ – коэффициенты при соответствующих степенях частоты.

2. Расчет статистических характеристик

Определим статистические характеристики вещественной $X(\omega)$ и мнимой $Y(\omega)$ частей (3), т.е. их математические ожидания, дисперсии, средние квадратические отклонения [3, 4].

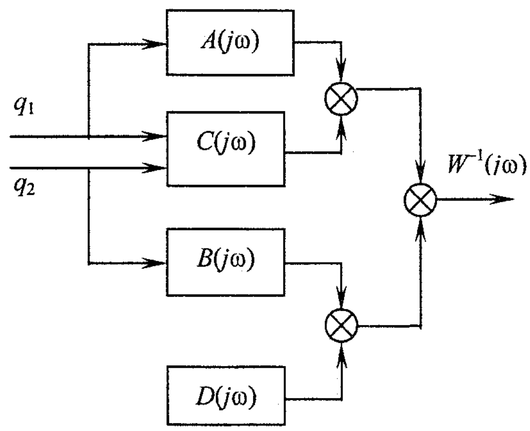

Рис. 1. Описание системы с двумя случайными параметрами

Математическое ожидание вещественной части $X(\omega)$ при условии, что параметры некоррелированы, определяется как

$$X_M(\omega) = M\{X(\omega)\} = m_1A_R(\omega) + m_2B_R(\omega) + m_1m_2C_R(\omega) + D_R(\omega). \quad (5)$$

В противном случае необходимо учитывать их корреляционный момент.

Центрированная величина находится как разность между случайной величиной и ее математическим ожиданием

$$X^0(\omega) = X(\omega) - X_M(\omega) = q_1^0A_R + q_2^0B_R + C_R[m_1q_2^0 + m_2q_1^0 + q_1^0q_2^0]. \quad (6)$$

Дисперсия вещественной части определится как математическое ожидание квадрата модуля центрированной величины

$$D\{X(\omega)\} = M\{|X^0(\omega)|^2\}. \qquad (7)$$

Рассмотрим выражение в фигурных скобках с учетом (3) и (6), и, сгруппировав слагаемые, получим:

$$|X^0(\omega)|^2 = (q_1^0)^2(A_R + C_R m_2)^2 + $$
$$+ (q_2^0)^2(B_R + m_1 C_R)^2 + (q_1^0 q_2^0)^2 C_R^2 +$$
$$+ 2q_1^0 q_2^0\{m_1 m_2 C_R^2 + A_R B_R + m_1 A_R C_R +$$
$$+ m_2 B_R C_R\} + 2(q_1^0)^2 q_2^0\{m_2 C_R^2 + A_R C_R\} +$$
$$+ 2q_1^0(q_2^0)^2\{m_1 C_R^2 + B_R C_R\}.$$

Если параметры некоррелированы, то

$M\{q_1^0 q_2^0\} = 0;$

$M\{(q_i^0)^2\} = D_i$ – дисперсия i-го параметра;

$M\{(q_1^0)^2 q_2^0\} = M\{(q_1^0)^2\}M\{q_2^0\} = 0;$

$M\{(q_1^0 q_2^0)^2\} = M\{(q_1^0)^2\}M\{(q_2^0)^2\} = D_1 D_2.$

Тогда выражение для дисперсии вещественной части примет вид:

$$D_R(\omega) = D_1(A_R + m_2 C_R)^2 +$$
$$+ D_2(B_R + m_1 C_R)^2 + C_R^2 D_1 D_2. \qquad (8)$$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) вещественной части

$$\sigma_R(\omega) = \pm\sqrt{D_R(\omega)}. \qquad (9)$$

Аналогичным образом могут быть получены выражения для дисперсии и СКО мнимой части:

$$D_I(\omega) = D_1(A_I + m_2 C_I)^2 +$$
$$+ D_2(B_I + m_1 C_I)^2 + C_I^2 D_1 D_2, \qquad (10)$$
$$\sigma_I(\omega) = \pm\sqrt{D_I(\omega)}.$$

Дисперсия всей характеристики определится как сумма дисперсий вещественной и мнимой частей (рис. 2)

$$D(\omega) = D_R(\omega) + D_I(\omega) = D_1\{(A_R + m_2 C_R)^2 +$$
$$+ (A_I + m_2 C_I)^2\} + D_2\{(B_R + m_1 C_R)^2 +$$
$$+ (B_I + m_1 C_I)^2\} + D_1 D_2(C_R^2 + C_I^2). \qquad (11)$$

СКО всей характеристики:

$$\sigma(\omega) = \pm\sqrt{\sigma_R^2(\omega) + \sigma_I^2(\omega)}. \qquad (12)$$

Оценим степени частоты в выражениях (9) и (10) для средних квадратических отклонений по вещественной и мнимой частям. Порядки полиномов A_R и A_I, B_R и B_I, C_R и C_I всегда будут различны, так как вещественные части берутся по четным степеням частоты обратной передаточной функции, а мнимые – по нечетным степеням. Это приводит к тому, что значение характеристики на соответствующей частоте будет находиться не в окружности [4], а в эллипсе рассеивания. С ростом частоты и в зависимости от порядка полиномов A_R и A_I, B_R и B_I, C_R и C_I полуоси этих эллипсов (по вещественной и мнимой частям) будут увеличиваться в разной степени и в какой-то момент (на какой-то частоте) этот эллипс будет превращаться в окружность.

3. Алгоритм построения семейства обратных частотных характеристик системы

Таким образом, поведение квазистационарной стохастической системы в частотной области описывается семейством обратных амплитудно-фазовых частотных характеристик (ОАФЧХ), состоящим из средней характеристики (математического ожидания), двух среднеотклоненных характеристик и двух предельноотклоненных характеристик. Алгоритм построения этого семейства следующий:

1. Представить передаточную функцию разомкнутой системы в неканоническом виде для того, чтобы можно было легко учесть случайность реальных физических параметров системы.

2. Перейти к обратной передаточной функции, обратным амплитудно-фазовым характеристикам, выделив случайные параметры.

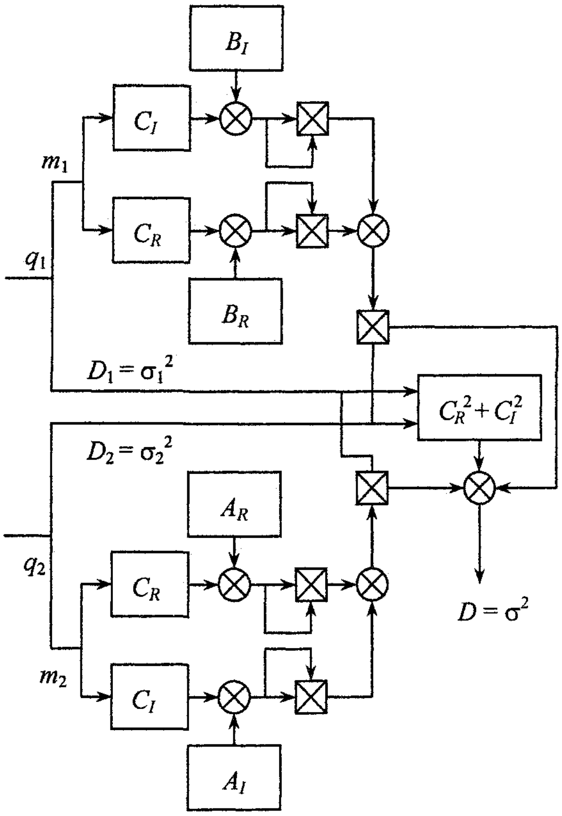

Рис. 2. Схема расчета дисперсии

Возможны два вида передаточных функций по характеру включения в них случайных параметров. Для первого случая:

$$W_1^{-1}(p) =$$
$$= \frac{q_1 A(p) + q_2 B(p) + q_1 q_2 C(p) + D(p)}{R(p)}; \qquad (13)$$

для второго случая:

$$W_2^{-1}(p) =$$
$$= \frac{q_1 A(p) + q_2 B(p) + q_1 q_2 C(p) + D(p)}{q_1 R(p)}. \qquad (14)$$

И в том и в другом случае передаточную функцию можно привести к виду

$$W^{-1}(p) =$$
$$= \tilde{q}_1 \tilde{A}(p) + \tilde{q}_2 \tilde{B}(p) + \tilde{q}_1 q_2 \tilde{C}(p) + \tilde{D}(p), \qquad (15)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{A}(p)=\dfrac{A(p)}{R(p)}; \\ \tilde{B}(p)=\dfrac{B(p)}{R(p)}; \\ \tilde{C}(p)=\dfrac{C(p)}{R(p)}; \\ \tilde{D}(p)=\dfrac{D(p)}{R(p)}, \end{cases} \qquad (16)$$

и в первом случае $\tilde{q}_1=q_1$, а во втором

$$\tilde{q}_1=\frac{1}{q_1}.$$

Обратная амплитудно-фазовая частотная характеристика системы (15) будет иметь вид

$$W^{-1}(j\omega)= \\ =\tilde{q}_1\tilde{A}(j\omega)+\tilde{q}_2\tilde{B}(j\omega)+\tilde{q}_1q_2\tilde{C}(j\omega)+\tilde{D}(j\omega). \qquad (17)$$

3. Определить статистические характеристики:

- найти математическое ожидание обратной амплитудно-фазовой характеристики (ОАФХ)

$$M\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}=M\{\tilde{q}_1\}\tilde{A}(j\omega)+M\{\tilde{q}_2\}\tilde{B}(j\omega)+ \\ +M\{\tilde{q}_1\tilde{q}_2\}\tilde{C}(j\omega)+\tilde{D}(j\omega); \qquad (18)$$

- представляя случайные параметры в виде суммы математических ожиданий и центрированных отклонений $q_i=q_i^0+M\{q_i\}$, определить центрированную ОАФХ системы как разность между ОАФХ системы и ее математическим ожиданием

$$\left[W^{-1}(j\omega)\right]^0=W^{-1}(j\omega)-M\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}= \\ =q_1^0\tilde{A}(j\omega)+q_2^0\tilde{B}(j\omega)+\tilde{C}(j\omega)(q_1q_2- \\ -M\{q_1\cdot q_2\}); \qquad (19)$$

- выделив вещественную и мнимую части, определить дисперсии ОАФХ системы по вещественной и мнимой частям как математическое ожидание квадрата модуля центрированной величины

$$\begin{cases} D_R\left\{\left[W^{-1}(j\omega)\right]^0\right\}=M\left\{\left|\mathrm{Re}\left[W^{-1}(j\omega)\right]^0\right|^2\right\}, \\ D_I\left\{\left[W^{-1}(j\omega)\right]^0\right\}=M\left\{\left|\mathrm{Im}\left[W^{-1}(j\omega)\right]^0\right|^2\right\}; \end{cases} \qquad (20)$$

- определить средние квадратические и предельные отклонения по вещественной и мнимой частям:

$$\begin{cases} \sigma_R\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}=\pm\sqrt{D_R\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}}; \\ \sigma_I\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}=\pm\sqrt{D_I\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}}; \\ \varepsilon_R\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}=a\sigma_R\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}; \\ \sigma_I\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}=a\sigma_I\left\{W^{-1}(j\omega)\right\}, \end{cases} \qquad (21)$$

где a – коэффициент для определения предельного отклонения (для нормального распределения $a=3$).

4. Построить семейство обратных частотных характеристик системы:

- построить среднюю характеристику (математическое ожидание);
- для фиксированных частот ω_i построить эллипсы рассеивания: на частоте ω_i определить значение вещественной и мнимой частей средней характеристики:

$$M(\omega_i)=X(\omega_i)+jY(\omega_i); \qquad (22)$$
$$C_X(\omega_i)=X(\omega_i);$$
$$C_Y(\omega_i)=Y(\omega_i).$$

Значения $C_X(\omega_i)$ и $C_Y(\omega_i)$ представляют собой смещение эллипса по осям относительно начала координат; полуоси эллипса определяются следующим образом: полуось, параллельная вещественной оси, определяется как СКО средней характеристики по вещественной оси $a_i=\sigma_R(\omega_I)$; полуось, параллельная мнимой оси, определяется как СКО средней характеристики по мнимой оси $b_i=\sigma_I(\omega_i)$.

Таким образом, уравнение эллипса на частоте ω_i описывается уравнением:

$$\left(\frac{X-C_X(\omega_i)}{\sigma_R(\omega_i)}\right)^2+\left(\frac{Y-C_Y(\omega_i)}{\sigma_I(\omega_i)}\right)^2=1; \qquad (23)$$

- пара среднеотклоненных характеристик получается как огибающие этого семейства.
- аналогичную процедуру провести для предельноотклоненных характеристик.

Представив уравнения эллипсов в виде параметрической зависимости от частоты

$$\varphi(x,y,\omega)=0$$

можно получить уравнения огибающих:

$$\frac{\partial\varphi(x,y,\omega)}{\partial\omega}=0. \qquad (24)$$

4. Анализ устойчивости и динамических свойств по семейству обратных частотных характеристик

При оценке влияния параметров на устойчивость семейства обратных амплитудно-фазовых характеристик (ОАФХ) можно выделить три случая:

1. Системы, у которых все семейство ОАФХ является «устойчивым».
2. Системы, у которых только предельноотклоненные ОАФХ не являются «устойчивыми».
3. Системы, у которых и среднеотклоненные и предельноотклоненные характеристики не являются «устойчивыми».

По семейству ОАФХ достаточно просто провести анализ устойчивости системы. Для этого можно воспользоваться критерием Найквиста для инверсных характеристик.

Система будет устойчива [2], если разность между числами отрицательных и положительных переходов обратной амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы отрезка действительной оси (0; –1) равна $m/2$, где m – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

Любая система автоматического регулирования должна быть не только устойчива, но и иметь некоторый запас устойчивости. Количественно оценить запас устойчивости можно на основании критерия Найквиста, по удалению ОАФХ разомкнутой системы от критической точки (–1; j0). Запасы устойчивости системы по фазе γ и по модулю h определяются следующим образом [2]:

- запас устойчивости системы по γ:

$$\gamma = 180° - \arg\{W^{-1}(\omega_c)\};$$
$$\omega_c \to |W^{-1}(\omega_c)| = 1; \qquad (25)$$

- запас по h:

$$h = 20\lg|W^{-1}(\omega_\varphi)|;$$
$$\omega_\varphi \to \arg\{W^{-1}(\omega_\varphi)\} = -180°. \qquad (26)$$

Трансформируя эти требования для плоскости обратных частотных характеристик, получим следующую формулировку: для того чтобы система регулирования имела запасы устойчивости не менее γ и h, обратная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы не должна заходить в запретную область, включающую в себя точку с координатами (–1; j0) и ограниченную лучами OC_1 и OC_2, проведенными из начала осей координат под углами (–180° + γ) и (–180° – γ), и дугами L_1 и L_2 с радиусами $1/(1-H)$ и $1/(1+H)$, где H определяется соотношением $\lg H = h/20$. Иллюстрация приведена на рис. 3.

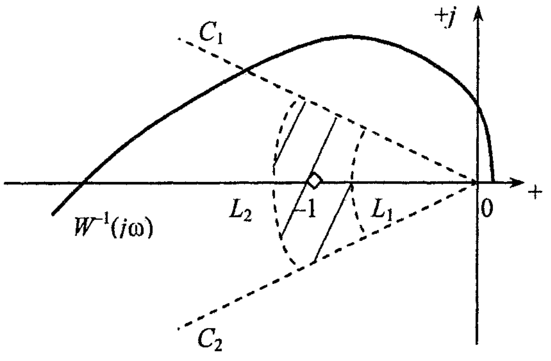

Рис. 3. Определение запасов устойчивости

С помощью ОАФХ можно проанализировать и динамические свойства стохастических квазистационарных систем.

Одной из важных характеристик системы является показатель колебательности M. Показатель колебательности - это отношение максимальной ординаты амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы к начальной ординате [2]:

$$M = \frac{A_{\max}}{A(0)}.$$

Так как в нашем распоряжении имеется ОАФХ разомкнутой системы, а M - характеристика АФЧХ замкнутой системы, то нужно перейти к рассмотрению обратной АЧХ замкнутой системы и получить уравнения, описывающие линии равных значений показателя колебательности на плоскости обратных частотных характеристик.

Для обратной АФЧХ замкнутой системы легко получить следующее соотношение:

$$\Phi^{-1}(j\omega) = \left[\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right]^{-1} = 1 + W^{-1}(j\omega), \qquad (27)$$

т.е. для получения семейства ОАФХ замкнутой системы достаточно сместить семейство ОАФХ разомкнутой системы по вещественной оси на единицу.

Для определения показателя колебательности [2] на комплексную плоскость наносят семейство окружностей радиусом R с центром, смещенным влево от начала координат на величину с:

$$\begin{cases} R = \dfrac{M}{M^2-1}; \\ c = \dfrac{M^2}{M^2-1}, \end{cases} \qquad (28)$$

где значение M изменяется от 1 до ∞. Уравнение линий равных значений M можно представить в виде:

$$(x+c)^2 + y^2 = R^2.$$

Получим описание линий равных значений M на комплексной плоскости. Будем полагать, что эти линии описываются частотной характеристикой вида:

$$W_M(j\omega) = l + \frac{k}{a + j\omega T} = U(\omega) + jV(\omega), \qquad (29)$$

где $l = R - c$ – смещение по вещественной оси.

Параметры a, k, T определим из следующих соотношений:

$$\omega \to \infty: \quad U(\omega) = R - c, \quad V(\omega) = 0; \qquad (30)$$
$$\omega = 0: \quad U(\omega) = -R - c, \quad V(\omega) = 0;$$
$$\omega = \frac{1}{T}: \quad U(\omega) = -c, \quad V(\omega) = -R.$$

Выразим $U(\omega)$ и $V(\omega)$ через параметры a, k, T:

$$\begin{cases} U(\omega) = l + \dfrac{ak}{a^2+\omega^2T^2}; \\ V(\omega) = \dfrac{-k\omega T}{a^2+\omega^2T^2}. \end{cases} \qquad (31)$$

Подставим разные значения частот (30) в выражения (31) и определим параметры k и a:

$$\begin{cases} k = 2R; \\ a = -1. \end{cases} \qquad (32)$$

Параметр T на форму линий не влияет и поэтому его можно положить равным единице.

Таким образом, уравнение линий равных значений M на комплексной плоскости с учетом (31) и (32) имеет вид:

$$W_M(j\omega) = R - c + \frac{2R}{-1 + j\omega}. \qquad (33)$$

При переходе к плоскости обратных частотных характеристик уравнение (33) необходимо преобразовать:

$$W_M^{-1}(j\omega) = \frac{1}{R - c + 2R(-1 + j\omega)^{-1}} =$$

$$= \frac{-1 + j\omega}{R + c + (R - c) j\omega}. \qquad (34)$$

Подставляя (28) в (34):

$$R + c = \frac{M + M^2}{M^2 - 1} = \frac{M}{M - 1};$$

$$R - c = \frac{M - M^2}{M^2 - 1} = \frac{-M}{M + 1},$$

получим

$$W_M^{-1}(j\omega) = \frac{-1 + j\omega}{\frac{M}{M-1} + j\omega \frac{M}{M+1}}, \quad \omega \in \left]-\infty; +\infty\right[. \qquad (35)$$

Совмещая на комплексной плоскости линии равных значений показателя колебательности M и семейство ОАФХ замкнутой системы с учетом (27), определяется диапазон изменения значений M. Иллюстрация приведена на рис. 4.

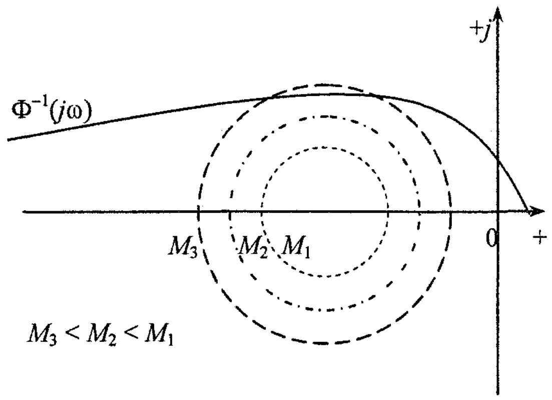

Рис. 4. Линии равных значений показателя колебательности

Заключение

1. Анализ квазистационарных стохастических систем с двумя случайными параметрами осуществляется по семейству обратных частотных характеристик с центральной характеристикой - математическим ожиданием и двумя парами среднеотклоненных и предельноотклоненных характеристик.

2. Среднеотклоненные и предельноотклоненные характеристики представляют собой огибающие (24) эллипсов рассеивания (23), центры которых (22) с увеличением частоты двигаются по средней характеристике, а полуоси (21) увеличиваются в разной степени друг относительно друга в зависимости от вида и параметров обратных частотных характеристик.

3. По построенному семейству характеристик можно оценить устойчивость системы, определить запасы устойчивости (25) и (26), а также, построив линии равных значений показателя колебательности (35), оценить его диапазон.

Литература

1.Кулешов В.С., Лакота НА. Динамика систем управления манипуляторами. - М.: Энергия, 1971. - 304 с.

2.Макаров ИМ., Менский Б.М. Линейные автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочные материалы), 2-е изд. - М.: Машиностроение, 1982. - 504 с.

3. Черноруцкий Г.С., Червяков В. Б. Системы автоматического управления со случайными вариациями параметров (элементы теории стационарных стохастических систем). - Челябинск: ЧПИ, 1974. - 108 с.

4. Черноруцкий Г.С., Сибрин АЛ., Жабреев В.С. Следящие системы автоматических манипуляторов/ Под ред. Г.С. Черноруцкого. -М.: Наука, 1987.-272 с.