УДК 621.311

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОТОКОВ ЭНЕРГОРЕСУРСОВ В СЛОЖНЫХ СЕТЯХ С УЧЕТОМ ДИНАМИКИ ИХ АККУМУЛИРОВАНИЯ

Л.С. Казаринов, О.В. Попова, Д.А. Шнайдер

Сложные производственные комплексы представляют собой сложные структуры, состоящие из технологических цехов, подключенных к сетям энергоресурсов, в качестве которых выступают природный газ, электрическая и тепловая энергия, пар на технологические нужды и др. Для масштабных производств распределение энергоресурсов осуществляется с помощью соответствующих сетей сложной конфигурации. Особенностью их функционирования является тесная связь с технологическими процессами. Например, потребление пара в металлургическом производстве носит крайне неравномерный характер. Ограниченность мощности паровых источников приводит к необходимости выработки стратегий управления пароснабжения, которые позволили бы использовать все ресурсы пара теплофикационной системы предприятия для стабилизации режимов пароснабжения и максимального повышения выработки продукции. Строгое решение задачи возможно на основе моделирования потоков распределения ресурсов в производственном комплексе с учетом динамики их аккумулирования.

1. Основные положения

Сеть снабжения энергоресурсами представляется в виде совокупности узлов и дуг, через которые проходят потоки энергоресурсов

$<\{node_i\};\ \{arc_j\}>$,

где $node_i$ – i-й узел сети; arc_j – j-я дуга сети.

Закон преобразования параметров энергоресурса на j-й дуге сети описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial \varphi^j(x_j,t)}{\partial t}+\sum_{l=1}^{3} a_{jl}(x_j,t,\varphi^j)\frac{\partial \varphi_l^j(x_j,t)}{\partial x_j}=$$

$$=f_j(x_j,t,\varphi^j),\ j\in M, \qquad (1)$$

где $\varphi^j = [\varphi_1^j(x_j, t),\ \varphi_2^j(x_j, t),\ \varphi_3^j(x_j, t)]$ – вектор-функция, описывающая состояние параметров ресурса (напор, расход, температура) на j-й дуге сети в точке с координатой $x_j \in (x_{1,j}, x_{2,j})$ в момент времени t; $x_{1,j}$, $x_{2,j}$ – координаты начала и конца j-й дуги сети; $f_j(\cdot)$ – некоторые известные вектор-функции.

Пусть $\varphi_1^j(x_j, t) = p_j(x_j, t) = p_j$; $\varphi_2^j(x_j, t) = g_j(x_j, t) = g_j$; $\varphi_3^j(x_j, t) = T_j(x_j, t) = T_j$ – функции распределения напора, расхода и температуры на j-й дуге сети. Функции $\varphi_l^j(x_j, t)$, $l = 1, 2, 3$, обладающие непрерывными первыми производными и удовлетворяющие уравнениям системы (1), являются решениями этой системы уравнений на j-й дуге сети.

Для получения модели неустановившегося потокораспределения в сети система уравнений (1) должна быть дополнена системой алгебраических уравнений, определяющей условия согласования параметров потоков энергоресурсов в узлах сети:

$$\psi_l[\varphi(x_{2,k}, t),\ \varphi(x_{1,q}, t)] = 0,$$
$$l = 1, 2, 3,\ k\in V_{2,i},\ \ q\in V_{1,i}, \qquad (2)$$

где $V_{1,i}$, $V_{2,i}$ – множества индексов дуг, входящих в i-й узел и исходящих из него.

Система уравнений (1) совместно с системой (2) является математической моделью неустановившегося потокораспределения в инженерной сети.

Связь параметров сети в общем случае описывается нелинейными динамическими операторами, которые в зависимости от физических свойств дуг могут быть:

- емкостного характера:

$(p_j,\ T_j)^{\mathrm{T}} = C_j(p_{1,j},\ g_j,\ T_{1,j})$,

где p_j, g_j, T_j – соответственно распределение по j-й дуге напоров, расходов, температур; $p_{1,j}$, $T_{1,j}$ – соответственно значения напора и температуры в начальном узле дуги;

- индуктивного характера:

$(g_j,\ T_j)^{\mathrm{T}} = L_j(p_j,\ g_{1,j}, T_{1,j})$.

Установившиеся процессы могут быть описаны нелинейными функциональными характеристиками:

- резистивного характера:

$$(p_{2,j},\ T_{2,j})^{\mathrm{T}} = R_j(p_{1,j},\ g_{1,j},\ T_{1,j}), \qquad (3)$$

где $p_{2,j}$, $T_{2,j}$ – соответственно значения напора и температуры в конечном узле дуги;

- кондуктивного характера:

$$(g_{2,j},\ T_{2,j})^{\mathrm{T}} = Y_j(\Delta p_j,\ T_{1,j}). \qquad (4)$$

Рассматривается класс сетей, расчет которых можно выполнить с достаточной для практики точностью при следующих предположениях.

1. Сеть носит сложный характер, число узлов сети может составлять сотни и тысячи.
2. Удельный вес элементов сети, для описания которых необходимо использовать динамические характеристики, значительно меньше веса элементов, для описания которых достаточно использовать нелинейные функциональные характеристики.
3. Среди элементов с динамическими характеристиками преобладают элементы емкостного характера.

Подобного класса сеть представляется следующим образом (рис. 1).

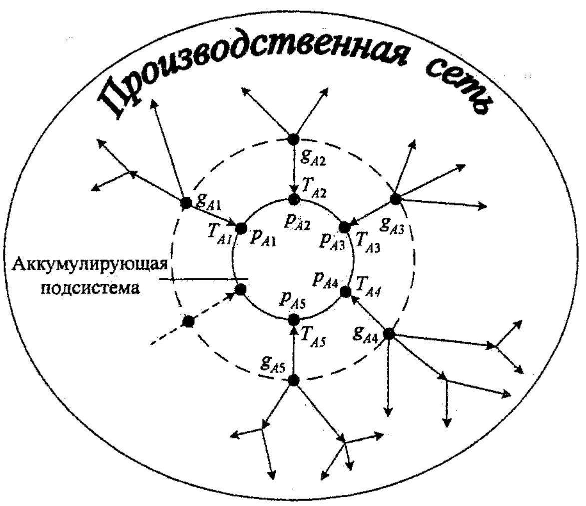

Рис. 1. Схема представления сети

Вся сеть в целом делится на подсистемы, часть из которых описывается нелинейными функциональными характеристиками, а другая часть – динамическими, представляющими аккумулирующие подсистемы с операторами емкостного типа. Название аккумулирующей подсистемы связано с тем, что подобная подсистема ведет себя как емкость: входящие в нее потоки могут накапливать энергоресурсы. Входами данной подсистемы являются распределение расходов g_{Aj}, а также температуры $T_{1,j}$ и напоры $p_{1,j}$, выходами – напоры p_{Aj} и температуры T_{Aj} аккумулирующей подсистемы. Такое представление является физичным.

Так как производственные сети, как правило, имеют большую размерность, для преодоления сложностей расчета в работе используется многослойная модель сложной сети, представленная на рис. 2.

Центральным ядром расчета сложной сети является расчет деревьев сети, который выполняется с использованием резистивных ветвей деревьев. Расчет деревьев сети высокой размерности может быть выполнен достаточно оперативно и с высокой точностью. Далее к базовому расчету деревьев сети последовательно подключаются расчеты с участием дополнительных элементов сети: хорд, потребителей, аккумулирующих подсистем и регуляторов систем автоматического регулирования. Подключение указанных дополнительных элементов осуществляется на основе решения нелинейных уравнений связи:

$$\begin{cases} \Delta P_{Ch}(G_{Ch},T_{Ch}) = 0; \\ \Delta T_{Ch}(G_{Ch},T_{Ch}) = 0; \\ \Delta G_H(G_H^{In},T_H^{In}) = 0; \\ \Delta T_H(G_H^{In},T_H^{In}) = 0; \\ \Delta P_A(G_A,T_A,P_A^0) = 0; \\ \Delta T_A(G_A,T_A,P_A^0) = 0; \\ x(x_0) = x_0, \end{cases}$$

где $\Delta P_{Ch} = P_{Ch}^{Ex} - P_{Ch}^{c}$, $\Delta T_{Ch} = T_{Ch}^{Ex} - T_{Ch}^{c}$ – разность соответственно напоров и температур, определенных из расчета сети с хордами и деревьев сети; $\Delta G_H = G_H - G_H^{In}$, $\Delta T_H = T_H - T_H^{In}$ – разность соответственно расходов и температур, определенных из расчета сети с потребителями и исходными условиями для расчета сети с хордами; $\Delta P_A = P_A^{Ex} - P_A^{c}$, $\Delta T_A = T_A^{Ex} - T_A^{c}$ – разность соответственно напоров и температур, определенных из расчета сети с аккумулирующими подсистемами и деревьев сети; x_0 – исходные условия управляющих воздействий; x – значения управляющего воздействия, полученные в результате расчета сети.

Таким образом, предложенную модель можно классифицировать как многослойную модель расчета потоков в сетях с учетом динамики их аккумулирования.

2. Вычислительный алгоритм расчета сети

В моделях газовых, водяных и паровых сетей определяемыми параметрами режимов являются напоры, расходы и температуры соответствующих потоков энергоресурсов. В сетях иной природы в качестве базовых параметров режимов могут использоваться иные параметры.

Для связи потоков энергетических ресурсов в узлах сети используются балансовые соотношения, а для нахождения их значений - метод Ньютона. Так как сети имеют большую размерность, алгоритм расчета построен с учетом разреженности матрицы элементов сети и возможности оперативного переключения элементов сети. В целом модель отражает не только физические процессы потоков в сетях как объектов управления, но и 2-уровневое представление процессов управления потоками в сетях. На нижнем уровне осуществляются процессы автоматического регулирования, на верхнем уровне - оперативно-диспетчерского управления.

Расчет установившегося процесса осуществляется с использованием функциональных зависимостей, в общем случае - нелинейных.

3. Расчет дерева сети

Узел сети представлен на рис. 3.

Здесь G_B^{In} – поток из ветви дерева, входящей в узел; G_{Ch}^{In} – потоки из хорд, входящих в узел; G_B^{Ex} – потоки из ветвей дерева, исходящих из узла; G_{Ch}^{Ex} – потоки из хорд, исходящих из узла; G_H^{Ex} – потоки из ветвей, идущих к потребителям.

Расчет потоков через узлы для сети будем определять на основе балансового соотношения

$$g_{B,i} = \sum_{j=1}^{NTEX(i)} g_{B,j} - \sum_{j=1}^{NCIN(i)} g_{Ch,j} + \sum_{j=1}^{NCEX(i)} g_{Ch,j} + \sum_{j=1}^{NLEX(i)} g_{H,j}, \quad (5)$$

где i – номер узла; $NTEX(i)$ – число ветвей дерева, исходящих из i-го узла; $NCIN(i)$, $NCEX(i)$ – число хорд соответственно, входящих в i-й узел и исходящих из него; $NLEX(i)$ – число потребителей, подключенных к i-му узлу.

В общем случае необходимо в узле сети учитывать суммирование потоков с разными энтальпиями по соотношению

$$h_i = h_i(p_i, T_i),$$

где h_i – энтальпия. Тогда энтальпия на выходе i-го узла

$$h_i^{\text{вых}} = \sum_{j=1}^{NIN(i)} g_j h_j \Bigg/ \sum_{j=1}^{NIN(i)} g_j ,$$

где $NIN(i)$ – число дуг сети, входящих в i-й узел.

Температура на выходе i-го узла определяется по соотношению

$$T_i^{\text{вых}} = T_i(h_i^{\text{вых}}, p_i).$$

конечном узле хорды, который определяется по соотношению

$$p_{Ch,j}^{Ex} = p_{Ch,j}^{In} - g_{Ch0,j}^{2} R_{Ch,j},$$

где $p_{Ch,j}^{In}$ – напор в начале j-й хорды, полученный из расчета деревьев сети по (5), (6); $R_{Ch,j}$ – сопротивление j-й хорды.

Невязка по напорам определяется по соотношению

$$E_{Ch}^2 = \sum_{j=1}^{NC}\left(p_{Ch,j}^{Ex} - p_{Ch,j}^{c}\right)^2 ,$$

где NC – число хорд; $p_{Ch,j}^{c}$ – напор в конце j-й хорды, полученный из расчета деревьев сети по (5), (6).

Минимизация невязки осуществляется методом Ньютона.

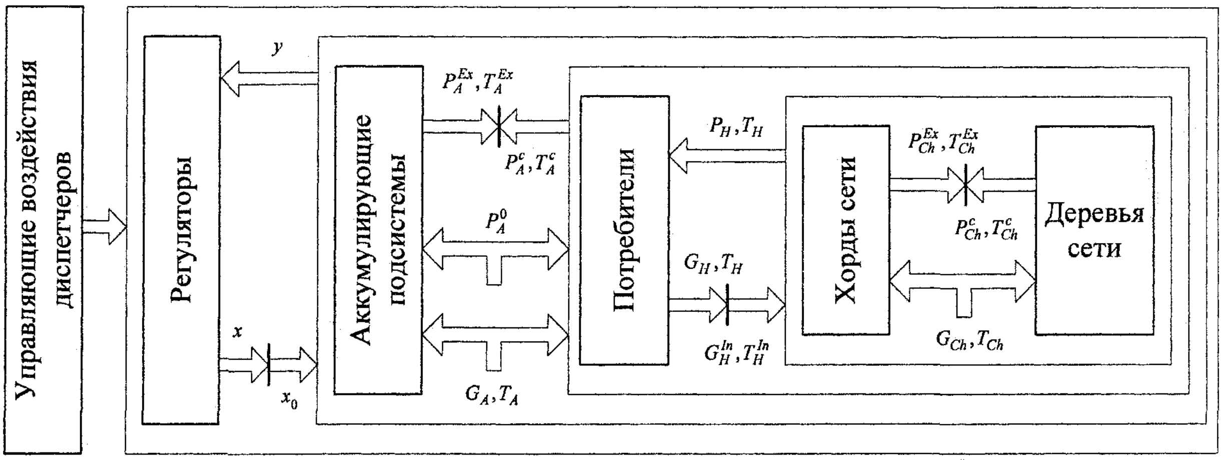

Рис. 2. Структура многослойной модели сложной сети

Расчет расходов энергоресурса через узлы осуществляется по соотношению (5), начиная с потребителей, расходы которых известны, до источников. Расчет напоров в узлах сети производится обратным движением от источников, напоры которых известны, к потребителям по соотношению

$$p_k = p_i - \Delta p_{ki}, \qquad (6)$$

где p_k, p_i – напоры соответственно в начальном i-м и конечном k-м узлах ветви; Δp_{ki} – падение напора в ветви, соединяющей i-й и k-й узлы, которое рассчитывается по формуле, отражающей физические свойства ветвей. Например, для гидродинамических расчетов используется формула

$$\Delta p_{ki} = R_{ki} g_{ki}^{2},$$

где R_{ki} – сопротивление ветви, соединяющей i-й и k-й узлы; g_{ki} – поток ресурса в ветви, соединяющей i-й и k-й узлы.

В общем случае напоры связаны с температурами и расчет производится с использованием нелинейных функциональных зависимостей резистивного характера вида (3).

4. Расчет сети с хордами

При расчете сети с хордами в частном случае задаются начальные значения расхода энергоресурса на хордах $g_{Ch0,j}$. Расчет в этом случае производится при минимизации невязки по напору в

В общем случае расчет ведется с использованием нелинейной функциональной зависимости резистивного характера вида (3).

5. Расчет сети с потребителями

Расчет сети с потребителями происходит при минимизации невязки расходов энергоресурсов на нагрузках. Невязка определяется по выражению

$$E_H^2 = \sum_{j=1}^{NLoad} (g_{H,j} - g_{L,j})^2 ,$$

где $g_{L,j}$, $g_{H,j}$ – соответственно начальные и расчетные расходы ресурса на j-м потребителе; $NLoad$ – число потребителей.

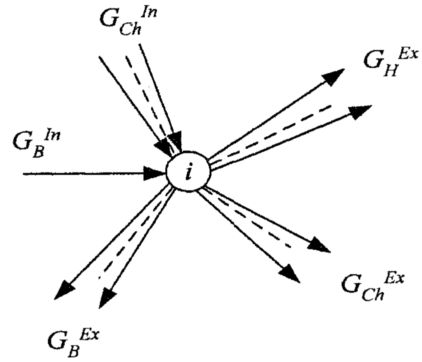

Рис. 3. Узел сети

Расходы ресурса на потребителях для гидродинамических сетей определяются по формуле

$$G_H = \mathrm{sign}(P_H)\sqrt{|Y_H P_H|}, \qquad (7)$$

где Y_H – проводимость нагрузок; P_H – напоры на нагрузках; $\mathrm{sign}(P_H)$ – знаковая функция, принимающая значения 1, если $P_H > 0$ и –1, если $P_H < 0$.

В общем случае нелинейная зависимость (7) определяется физическими свойствами соответствующих потребителей.

Минимизация невязок осуществляется методом Ньютона.

В общем случае расчет ведется с использованием нелинейной функциональной зависимости кондуктивного характера вида (4).

6. Расчет сети с аккумуляторами

Расчет сети с аккумуляторами рассмотрим на простом примере аккумулирующего узла. Рсчет в этом случае происходит при минимизации невязки по напору в аккумулирующем узле, в который входит и выходит по одной ветви (рис. 4).

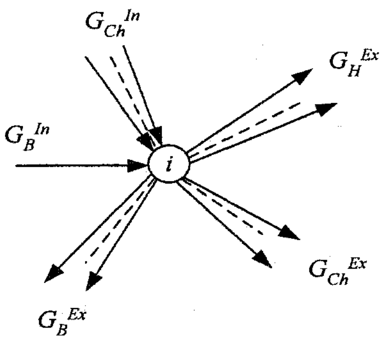

Рис. 4. Аккумулирующий узел сети

Материальный баланс аккумулятора

$$M_{A,k} = (M_{A,k-1} + \Delta t(G_{1,k-1} - G_{2,k-1}))^+,$$

где M_A – масса, кг; Δt – шаг по времени; k – текущий шаг решения.

Связь материального баланса с параметрами режимов аккумулятора определяется его физическими свойствами. Так, в случае, если рассматриваемый ресурс представляет собой газ, то в соответствии с уравнением Клапейрона

$$P_A V_A = M_A R_A T_A, \qquad (8)$$

где P_A – напор, Па; V_A – объем, м^3; T_A – абсолютная температура, К; R_A – универсальная газовая постоянная.

Из (8) следует функциональное уравнение связи

$$P_{A,k} = A_A M_{A,k},$$

где $A_A = R_A T_A / V_A$ – внутреннее сопротивление, или в общем случае используются экспериментальные характеристики на основе разложения в ряд

$$P_{A,k} = \sum_{i=1}^{n} A_{Ai} M_{A,k}{}^{i}.$$

В общем случае расчет аккумулирующей подсистемы основывается на решении дифференциальных уравнений вида (2), (3), описывающих динамику потоков. При этом могут быть использованы самые разнообразные методы решения дифференциальных уравнений сетей как с сосредоточенными, так и распределенными параметрами. Так, для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных базовым является метод сеток [1].

При моделировании сетей возникает необходимость регулирования пропускных способностей дуг сети с целью изменения расходов и напоров энергоресурса. Для этого вводится модель регулятора.

Регулятор можно представить в виде следующей структуры (рис. 5). На вход подаются измеряемая величина y_R и уставка данной величины y_{R0}. По указанным входным данным вычисляется невязка e_R, поступающая на вход экспоненциального фильтра, который необходим для сглаживания потоков энергоресурсов в сетях с импульсной нагрузкой. Выходными величинами фильтра являются пропорциональная (fe_R), интегральная (int_e_R) и дифференциальная (de_R) составляющие невязки. Выход ПИД-регулятора x_R, умноженный на коэффициент изменения сопротивления K_L представляет значение регулируемой величины h_R. В общем случае K_L является нелинейной функцией, определяемой эмпирически.

В качестве измеряемых величин используют напор в узле, либо расход энергоресурса в дуге. Регулируемой величиной является сопротивление дуги, изменяя которое необходимо свести невязку на входе экспоненциального фильтра к минимальному значению. Невязка между измеряемой величиной и ее уставкой

$$e_{R,k} = y_{R,k} - y_{R0}.$$

Регулируемое значение сопротивления определяется по формуле

$$x_{R,k} = K_{R0} fe_{R,k} + K_{R1} int\_e_{R,k} + K_{R2} de_{R,k},$$

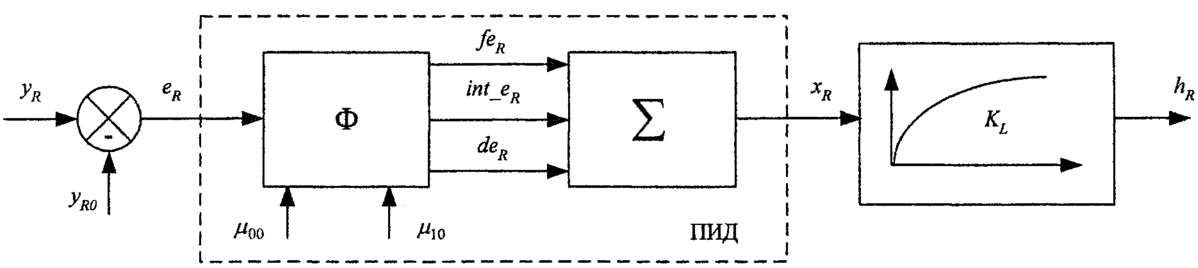

Рис. 5. Блочная схема регулирования

где k – текущий шаг решения; K_{R0}, K_{R1}, K_{R2} – значения пропорционального, интегрального, дифференциального коэффициентов регулятора.

Соотношения для нахождения интегральной, пропорциональной, дифференциальной составляющей невязки следующие:

$$int\_e_{R,k} = int\_e_{R,k-1} + \Delta t fe_{R,k} + 0{,}5\Delta t^2 de_{R,k};$$

$$\begin{cases} fe_{R,k} = 2c_\text{ф}\mu_{0,k} - c_\text{ф}^2\mu_{1,k}; \\ de_{R,k} = -c_\text{ф}^3\mu_{1,k} + c_\text{ф}^2\mu_{0,k}, \end{cases}$$

где Δt – шаг по времени; $c_\text{ф}$ – константа, определяемая как обратная величина от постоянной времени фильтра $\tau_\text{ф}$ ($c_\text{ф} = 1/\tau_\text{ф}$); μ_i – i-е моменты входного сигнала

$$\begin{cases} \mu_{0,k} = \dfrac{\tau_\text{ф}}{\tau_\text{ф} + \Delta t}(\mu_{0,k-1} + \Delta t e_{R,k}); \\ \mu_{1,k} = \dfrac{\tau_\text{ф}}{\tau_\text{ф} + \Delta t}(\mu_{1,k-1} + \Delta t e_{R,k}). \end{cases}$$

Заключение

Для моделирования энергетических потоков ресурсов в сложных производственных сетях предложена многослойная модель сети, позволяющая свести общую задачу расчета сложной сети к совокупности простых подзадач, каждая из которых имеет естественную физическую постановку. Модель включает следующие слои: деревья графа сети, описывающие ее структуру, хорды, потребители, аккумулирующие подсистемы, регуляторы, оперативное управление.

Литература

1. *Евдокимов А.Г., Тевяшев А.Д., Дубровский В.В. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. - М.: Стройиздат, 1990. - 368 с.*

2. *Меренков А.П., Хасилев В.Я. Теория гидравлических цепей. -М.: Наука, 1985. - 279 с.*