УДК 681.2-55+621.822.6+621.892:533

РЕШЕНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОДШИПНИКАХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ПРИБОРОВ

М.А. Василенко, С.Г. Дадаев

Несколько лет назад в научной литературе появились теоретические работы [1-6], в которых исследовались статические характеристики газодинамических подшипников с двумя профилированными спиральными, прямоугольными канавками поверхностями. Результаты этих работ предсказывали значительное улучшение их статических характеристик. Представляет интерес исследовать не только статические, но и динамические характеристики таких подшипников.

В работе [7] получено уравнение для давления в смазочном слое газодинамических опор скольжения гироскопических приборов с двумя подвижными и профилированными спиральными канавками поверхностями. Решение этого уравнения прямыми численными методами представляет серьёзные трудности, в связи с зависимостью давления от пяти переменных, две из которых быстрые. Указан путь для его аналитического решения методом сращиваемых асимптотических разложений и осреднением по периодам быстрых переменных.

Целью настоящей работы является аналитическое решение этого уравнения в первом приближении. Это решение даёт новое, приближённое уравнение для давления в смазочном слое, которое оказывается более простым, чем исходное и позволяет подойти к исследованию динамических характеристик роторных систем на таких опорах.

После подстановки асимптотического разложения для давления:

$$P(q_1,q_2,\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)=P_0(q_1,q_2,\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)+$$
$$+\varepsilon P_1(q_1,q_2,\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)+\varepsilon^2 P_2(q_1,q_2,\tau,\varsigma_1,\varsigma_2)+\dots \quad (1)$$

в (7) (в [7]) и сбора слагаемых при одинаковых степенях малого параметра $\varepsilon = 1/m$ (полагаем число канавок на обеих поверхностях одинаковым $m_1 = m_2 = m$), получаем систему равенств:

$$\varepsilon^2:\ \cos(\beta_2-\beta_1)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(K_0\frac{\partial P_0}{\partial\zeta_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(K_0\frac{\partial P_0}{\partial\zeta_1}\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_0}{\partial\zeta_k}\right)=0; \quad (2)$$

$$\varepsilon^1:\ d_6\left\{\cos(\beta_2-\beta_1)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_1}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_k}\right)\right\}+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k d_{5k}\frac{\partial(P_0h)}{\partial\zeta_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_{3k}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\right)+\sum_{k=1}^{2}d_{4k}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\right)=0; \quad (3)$$

$$\varepsilon^2:\ d_6\left\{\cos(\beta_2-\beta_1)\left[\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(K_0\frac{\partial P_2}{\partial\zeta_2}+h^3P_1\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_2}\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(K_0\frac{\partial P_2}{\partial\zeta_1}+h^3P_1\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_1}\right)\right]+$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_2}{\partial\zeta_k}+h^3P_1\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_k}\right)\right\}+$$
$$+(\Lambda_2-\Lambda_1)\sum_{k=1}^{2}(-1)^k d_{5k}\frac{\partial(P_1h)}{\partial\zeta_k}+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_{3k}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_k}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial q_1}+h^3P_1\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\right)\right]+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_{4k}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial\zeta_k}\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left(K_0\frac{\partial P_1}{\partial q_2}+h^3P_1\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\right)\right]+$$
$$+(\Lambda_1+\Lambda_2)\frac{\partial(d_1P_0h)}{\partial q_1}+d_1\frac{\partial(P_0h)}{\partial\tau}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(d_2K_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{d_2}K_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\right)=0. \quad (4)$$

Из уравнения (2) следует, что функция P_0 не зависит от быстрых переменных ζ_1, ζ_2, т.е.

$$P_0=P_0(q_1,q_2,\tau). \quad (5)$$

В силу периодичности функций P_0, h, P_1, P_2 и их производных по быстрым переменным ζ_1, ζ_2, рассматриваются три оператора осреднения

$$\overline{(\dots)}^1=\frac{1}{T_1}\int_0^{T_1}(\dots)\,d\zeta_1; \quad (6)$$

$$\overline{(\dots)}^2=\frac{1}{T_2}\int_0^{T_2}(\dots)\,d\zeta_2; \quad (7)$$

$$\overline{\overline{(\dots)}^1}^2=\overline{\overline{(\dots)}^2}^1=\frac{1}{T_1T_2}\int_0^{T_1}\int_0^{T_2}(\dots)\,d\zeta_1\,d\zeta_2=\overline{\overline{(\dots)}}. \quad (8)$$

Если оператор осреднения (8) применить к уравнению (4), то получим равенство:

$$d_1\frac{\partial\left(P_0\overline{\overline{h}}\right)}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Z_1+d_2\overline{\overline{K_0}}\frac{\partial P_0}{\partial q_1}+\Lambda_S d_1P_0\overline{\overline{h}}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Z_2+\frac{1}{d_2}\overline{\overline{K_0}}\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\right)=0, \quad (9)$$

где

$$\Lambda_s=\Lambda_1+\Lambda_2;$$
$$Z_1=d_{31}X_1+d_{32}X_2;$$
$$Z_2=d_{41}X_1+d_{42}X_2;$$

$$X_1 = \overline{\overline{K_0 \frac{\partial P_1}{\partial \zeta_1}}};$$

$$X_2 = \overline{\overline{K_0 \frac{\partial P_1}{\partial \zeta_2}}}.$$

Для нахождения неизвестных функций X_1 и X_2 обращаемся к уравнению (3).

Сначала интегрируем его по быстрой переменной ζ_1 частным образом в пределах от начала периода, т.е. от нуля до ζ_1. Получаем равенство:

$$d_6\left(K_0 Y_1\right) + d_7\left(K_0 Y_2\right) = D_{11} - D_{12} - D_{13}, \qquad (10)$$

где

$$d_7 = d_6 \cos(\beta_2 - \beta_1);$$

$$Y_1 = \frac{\partial P_1}{\partial \zeta_1};$$

$$Y_2 = \frac{\partial P_1}{\partial \zeta_2};$$

$$D_{11} = D_{11}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2);$$

$$D_{12} = D_{12}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2);$$

$$D_{13} = D_{13}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2).$$

Затем интегрируем уравнение (3) по переменной ζ_2 частным образом в пределах от нуля до ζ_2. Получаем другое равенство:

$$d_6\left(K_0 Y_2\right) + d_7\left(K_0 Y_1\right) = D_{21} - D_{22} - D_{23}, \qquad (11)$$

где

$$D_{21} = D_{21}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2);$$

$$D_{22} = D_{22}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2);$$

$$D_{23} = D_{23}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2).$$

После применения оператора двойного осреднения $\overline{\overline{(\ldots)}}$ к уравнениям (10) и (11), получаем систему двух уравнений для нахождения двух неизвестных X_1, X_2:

$$\begin{cases} d_6 X_1 + d_7 X_2 = \overline{\overline{D_{11}}} - \overline{\overline{D_{12}}} - \overline{\overline{D_{13}}}; \\ d_6 X_2 + d_7 X_1 = \overline{\overline{D_{21}}} - \overline{\overline{D_{22}}} - \overline{\overline{D_{23}}}, \end{cases} \qquad (12)$$

где

$$\overline{\overline{D_{11}}} = \overline{D_{11}}^2;$$

$$\overline{\overline{D_{21}}} = \overline{D_{21}}^1;$$

$$\begin{cases} \overline{\overline{D_{13}}} = \left(\Lambda_1 - \Lambda_2\right) d_{51} P_0 \overline{\overline{h}} + \\ + d_{31} \overline{\overline{K_0}} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} + d_{41} \overline{\overline{K_0}} \frac{\partial P_0}{\partial q_2}; \\ \overline{\overline{D_{23}}} = \left(\Lambda_2 - \Lambda_1\right) d_{52} P_0 \overline{\overline{h}} + \\ + d_{32} \overline{\overline{K_0}} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} + d_{42} \overline{\overline{K_0}} \frac{\partial P_0}{\partial q_2}. \end{cases} \qquad (13)$$

В уравнениях (12) функции $D_{11} = D_{11}(q_1, q_1, \tau, \zeta_2)$ и $D_{21} = D_{21}(q_1, q_1, \tau, \zeta_1)$ являются неизвестными.

Для их нахождения, опираясь на результаты исследований опор с одной профилированной поверхностью, будем считать, что если функция P_0 не зависит от быстрых переменных ζ_1 и ζ_2, то функция P_1 зависит от быстрых переменных ζ_1 и ζ_2 линейно:

$$P_1(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2) = a + b\,\zeta_1 + c\,\zeta_2. \qquad (14)$$

В этом случае для кусочно-постоянных функций $h_1(\zeta_1)$ и $h_2(\zeta_2)$ (функций определяющих геометрию прямоугольных канавок на подвижных поверхностях) функции

$$D_{12}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2) = D_{22}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1, \zeta_2) = 0;$$

$$\overline{\overline{D_{12}}} = \overline{\overline{D_{22}}} = 0. \qquad (15)$$

Неизвестные функции $D_{11} = D_{11}(q_1, q_1, \tau, \zeta_2)$ и $D_{21} = D_{21}(q_1, q_1, \tau, \zeta_1)$ находятся, если снова обратиться к уравнениям (10) и (11), которые предварительно разделить на функцию K_0:

$$d_6 Y_1 + d_7 Y_2 = \frac{1}{K_0} D_{11}(q_1, q_2, \tau, \zeta_2) -$$

$$-\left(\Lambda_1 - \Lambda_2\right) d_{51} P_0 \frac{h}{K_0} - d_{31} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} - d_{41} \frac{\partial P_0}{\partial q_2}; \qquad (16)$$

$$d_6 Y_2 + d_7 Y_1 = \frac{1}{K_0} D_{21}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1) -$$

$$-\left(\Lambda_2 - \Lambda_1\right) d_{52} P_0 \frac{h}{K_0} - d_{32} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} - d_{42} \frac{\partial P_0}{\partial q_2}; \qquad (17)$$

Теперь, в силу особенностей уравнений (16) и (17) неизвестные функции $D_{11} = D_{11}(q_1, q_1, \tau, \zeta_2)$ и $D_{21} = D_{21}(q_1, q_1, \tau, \zeta_1)$ находим, применяя к уравнению (16) оператор осреднения (6), а к уравнению (17) – оператор осреднения (7).

После чего, применяя к найденным функциям оператор осреднения (8), получаем:

$$\overline{\overline{D_{11}(q_1, q_2, \tau, \zeta_2)}} = \overline{D_{11}(q_1, q_2, \tau, \zeta_2)}^2 =$$

$$= d_7 \overline{\left(\frac{\overline{Y_2}^1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^1}\right)}^2 + \left(\Lambda_1 - \Lambda_2\right) d_{51} P_0 \overline{\left(\frac{\overline{\left(h K_0^{-1}\right)}^1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^1}\right)}^2 +$$

$$+ d_{31} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} \overline{\left(\frac{1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^1}\right)}^2 + d_{41} \frac{\partial P_0}{\partial q_2} \overline{\left(\frac{1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^1}\right)}^2; \qquad (18)$$

$$\overline{\overline{D_{21}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1)}} = \overline{D_{21}(q_1, q_2, \tau, \zeta_1)}^1 =$$

$$= d_7 \overline{\left(\frac{\overline{Y_1}^2}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^2}\right)}^1 + \left(\Lambda_2 - \Lambda_1\right) d_{52} P_0 \overline{\left(\frac{\overline{\left(h K_0^{-1}\right)}^2}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^2}\right)}^1 +$$

$$+ d_{32} \frac{\partial P_0}{\partial q_1} \overline{\left(\frac{1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^2}\right)}^1 + d_{42} \frac{\partial P_0}{\partial q_2} \overline{\left(\frac{1}{\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^2}\right)}^1. \qquad (19)$$

Равенства (18) и (19) после их подстановки в равенство (12), позволяют найти неизвестные X_1 и X_2, если будут найдены функции $\overline{Y_1}^2$ и $\overline{Y_2}^1$.

В соответствии с линейной зависимостью функции $P_1 = P_1(q_1, q_1, \tau, \zeta_1, \zeta_2)$ от переменных ζ_1 и ζ_2, имеем:

$$\overline{Y_1}^{\,2}(\zeta_1^*) = \begin{cases} n_3, & \zeta_1^* \in (0,\alpha_1); \\ n_4, & \zeta_1^* \in (\alpha_1, 1), \end{cases} \qquad \zeta_1^* = \zeta_1/T_1; \quad (20)$$

$$\overline{Y_2}^{\,1}(\zeta_1^*) = \begin{cases} n_1, & \zeta_2^* \in (0,\alpha_2); \\ n_2, & \zeta_1^* \in (\alpha_2, 1), \end{cases} \qquad \zeta_2^* = \zeta_2/T_2. \quad (21)$$

Обратившись снова к системе уравнений (16) и (17), подставив в них найденные ранее функции $D_{11} = D_{11}(q_1, q_1, \tau, \zeta_2)$ и $D_{21} = D_{21}(q_1, q_1, \tau, \zeta_1)$, и применив к уравнению (16) оператор (7), к уравнению (17) оператор (6), получим систему двух уравнений с четырьмя неизвестными n_1, n_2, n_3, n_4:

$$\zeta_1^* \in (0,\alpha_1):\ d_6 n_3 =$$

$$= d_7\overline{\left(\frac{\overline{Y_2}^{\,1}}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,1}}\right)}^{\,2} + (\Lambda_1-\Lambda_2)d_{51}P_0\overline{\left(\frac{\overline{\left(hK_0^{-1}\right)}^{\,1}}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,1}}\right)}^{\,2} +$$

$$+d_{31}\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\overline{\left(\frac{1}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,1}}\right)}^{\,2} + d_{41}\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\overline{\left(\frac{1}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,1}}\right)}^{\,2} -$$

$$-(\Lambda_1-\Lambda_2)d_{51}P_0\overline{\left(\frac{h}{K_0}\right)}^{\,2} - d_{31}\frac{\partial P_0}{\partial q_1} - d_{41}\frac{\partial P_0}{\partial q_2}; \qquad (22)$$

$$\zeta_2^* \in (0,\alpha_2):\ d_7 n_1 =$$

$$= d_6\overline{\left(\frac{\overline{Y_2}^{\,2}}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,2}}\right)}^{\,1} + (\Lambda_2-\Lambda_1)d_{52}P_0\overline{\left(\frac{\overline{\left(hK_0^{-1}\right)}^{\,2}}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,2}}\right)}^{\,1} +$$

$$+d_{32}\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\overline{\left(\frac{1}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,2}}\right)}^{\,1} + d_{42}\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\overline{\left(\frac{1}{K_0\overline{\left(K_0^{-1}\right)}^{\,2}}\right)}^{\,1} -$$

$$-(\Lambda_2-\Lambda_1)d_{52}P_0\overline{\left(\frac{h}{K_0}\right)}^{\,1} - d_{32}\frac{\partial P_0}{\partial q_1} - d_{42}\frac{\partial P_0}{\partial q_2}. \qquad (23)$$

Еще два уравнения для нахождения четырех неизвестных n_1, n_2, n_3, n_4 получаем, используя равенства:

$$\begin{cases} \overline{\overline{Y_1}^{\,2}}^{\,1} = 0; \\ \overline{\overline{Y_2}^{\,1}}^{\,2} = 0. \end{cases} \qquad (24)$$

Отсюда вытекает:

$$\begin{cases} n_4 = -\dfrac{\alpha_1}{1-\alpha_1}n_3; \\ n_2 = -\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}n_1. \end{cases} \qquad (25)$$

Определив неизвестные n_1, n_2, n_3, n_4, находим функции Z_1 и Z_2:

$$Z_1 = P_0\left[\delta_{11} + (\Lambda_1-\Lambda_2)m_{12}\right] + P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\times$$

$$\times\left(\delta_{12} + m_{13}^*\right) + P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\left(\delta_{13} + m_{14}^*\right); \qquad (26)$$

$$Z_2 = P_0\left[\delta_{21} + (\Lambda_1-\Lambda_2)m_{22}\right] + P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1}\times$$

$$\times\left(\delta_{22} + m_{23}^*\right) + P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2}\left(\delta_{23} + m_{24}^*\right), \qquad (27)$$

и получаем уравнение для главной составляющей давления P функции P_0:

$$d_1\frac{\partial\left(P_0\overline{\overline{h}}\right)}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial q_1}\left(A_{10}P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1} + B_{10}P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2} + C_{10}P_0\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(A_{20}P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_1} + B_{20}P_0\frac{\partial P_0}{\partial q_2} + C_{20}P_0\right) = 0. \qquad (28)$$

Выражения для функций δ_{ij}, m_{ij}, m_{ij}^*, A_{i0}, B_{i0}, C_{i0} не приводятся, ввиду громоздкости.

Как следует из приведённых рассуждений и выкладок, после подстановки функции P_0 удовлетворяющей уравнению (28) в исходное уравнение для давления, в нем останутся малые слагаемые порядка ε^3 и менее. Поэтому для числа канавок большем 6, давление P определяется функцией P_0 с высокой точностью.

В случае профилирования только одной из поверхностей, из уравнения (28) получаются известные уравнения для давления в первом приближении парциальных подшипников **[8, 9]**.

Заключение

Получено приближенное уравнение для давления в смазочном слое газодинамических опор гироскопов с двумя профилированными спиральными или винтовыми канавками поверхностями деталей подшипника. Оно с высокой точностью заменяет исходное уравнение и не содержит зависимостей давления от быстрых переменных. Полученное уравнение позволяет подойти к его решению и прямыми численными методами, и приближенными методами с целью получения статических и динамических характеристик смазочного слоя, а также изучения динамики роторов гироскопов на таких опорах.

Литература

1. Емельянов А.В., Емельянов И.А. Основы теории газодинамических подшипников и бесконтактных уплотнений со спиральными канавками на обеих поверхностях// Докл. РАН. - 1998. - Т. 363, № 2. - С. 187-190.

2. Yemelyanov A. V., Yemelyanov LA. Physical models, theory and fundamental improvement to self acting-grooved gas bearings and disco-seals// Pro-

ceedings of the Institution of Mechanical Engineers. - 1999. -Part J, Vol. 213, №4.-P 263-273.

3. Емельянов И.А. Оценка главного момента сил вязкого трения в смазочном слое бинарного газодинамического подшипника// Трение и износ. - 1999. - Т. 20, № 1. - С. 20-27.

4. Емельянов А.В., Емельянов И.А, Деркач М.И. Развитие теории бинарных газодинамических подшипников и бесконтактных уплотнений// Труды регионального конкурса научных проектов в области естественных наук- 2000. - Вып. 1. - С. 48-66.

5. Емельянов А.В., Емельянов И.А. Теория газодинамических подшипников со спиральными канавками на обеих рабочих поверхностях// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. - 2000. - № 3. - С. 46-56.

6. Емельянов А.В. и др. Расчет бинарных газодинамических подшипников на основе краевой задачи для четырех областей смазочного слоя// Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2003. -№3.~ С 100-111.

7.Дадаев С.Г. Уравнение для давления в газодинамических подшипниках гироскопических приборов// Известия Челябинского научного центра УрО РАН. - 2004. -№ 3.- С. 97-101. - Сервер: http://www. esc. ac.ru/news/2004_3/2004_3_111.pdf

8.Дадаев С.Г Нестационарные модели газодинамических подшипников со спиральными канавками. - Челябинск: ЧГТУ, 1996. -Ч.1.- 162 с.

9.Дадаев С.Г. Нестационарные модели газодинамических подшипников со спиральными канавками. - Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2000. - 4.2. -231 с.