УДК 51-72:531 + 517.938

ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТОТНОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СВОБОДНОГО УПРУГОГО ОБЪЕКТА, ПОЛОСТИ КОТОРОГО ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕНЫ ЖИДКОСТЬЮ

Е.Н. Шеповалов

Разработаны: методика построения обобщенной функции Грина; частотная гриновская функция для свободного упругого стержня (с произвольным распределением масс и изгибных жесткостей), содержащего полости, частично заполненные жидкостью.

Известно [1, 2], что нахождение динамического отклика сложной механической системы на внешнее воздействие сводится к построению частотной гриновской функции, что представляет собой, в большинстве практических случаях, сложную вычислительную проблему.

Цель работы - построение частотной функции Грина.

Для решения этой задачи тонкостенную конструкцию с полостями, частично заполненными жидкостью будем отождествлять со свободным бездиссипативным упругим стержнем, имеющим достаточное удлинение в направлении оси, лежащей на пересечении плоскостей симметрии ($L \gg R_0$, где L - длина, R_0 - характерный размер поперечного сечения). С переменным по длине распределением моментов инерции и модулей упругости, а также масс. Допускаем существование сосредоточенных масс, локализованных в интервале $(0,L)$.

Исследуя движение упругого стержня, будем рассматривать две системы координат: прямоугольную - $\overline{0}\xi\eta\zeta$, которую условно будем считать неподвижной (инерциальной), и прямоугольную координатную систему $OXYZ$, связанную с упругим стержнем, находящимся в недеформированном состоянии. Система $OXYZ$ такова, что рассматриваемый упругий континуум в неподвижном состоянии покоится на отрезке [0,1] оси OX, а оси OY и OZ параллельны главным осям инерции сечения недеформированного стержня. Начало координат поместим в плоскости левого среза стержня.

Обозначим количественные характеристики: t - время, отсчитанное от нужного момента, $y(x,t)$ - поперечная временная эволюция точки $x \in [0,L]$ колеблющегося континуума, $m_0(x)$ - массовое распределение конструкции; E_0 - модуль упругости материала конструкции; $I_0(x)$ - момент инерции поперечного сечения конструкции в точке x относительно нейтральной оси изгиба, $E_0 I_0(x) > 0$ и непрерывна на [0,L], кроме конечного числа точек, в которых может претерпевать скачки на конечные величины; $q(x,t)$ - погонные внешние силы.

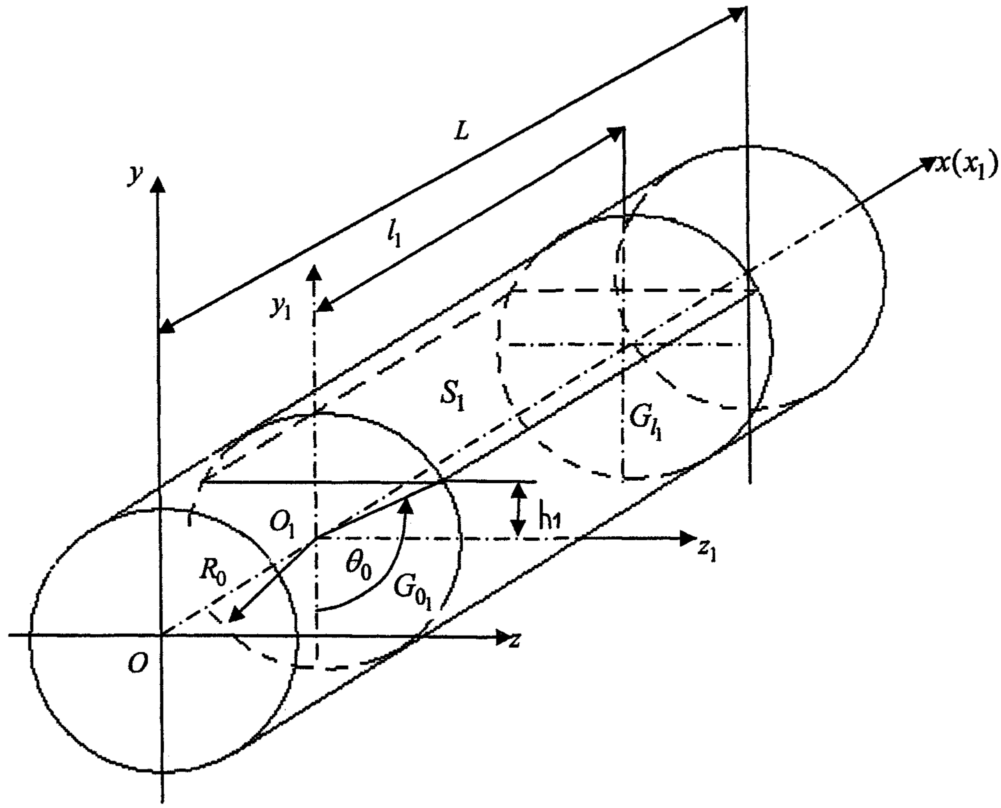
Используя известное соотношение теории изгиба [3-5], являющееся следствием закона Гука, гипотезы плоских сечений, устанавливающие связь между кривизной упругой линии и изгибающим моментом, пренебрегая продольными силами и инерцией поворота поперечных сечений, рассматривая только изгибные деформации, получим уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t) \ , \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\left[E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}y(x,t)\right]_{x=0,\,L} = 0; \\ &\left[\frac{\partial}{\partial x}E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}y(x,t)\right]_{x=0,\,L} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(2)}$$

Для определения сил, действующих со стороны жидкости на стенки отсека при его колебаниях, ограничимся рассмотрением случая только одной полости. Располагаем подвижную систему координат $0_1 x_1 y_1 z_1$, имеющую начало в плоскости левого днища недеформированной полости, таким образом, чтобы в невозмущенном положении механической системы «стержень-жидкость» ось $0_1 y_1$ была перпендикулярна свободной поверхности жидкости, а ось $0_1 x_1$ совпадала с продольной осью стержня (см. рисунок).



Рисунок

Решая гидродинамическую задачу [6], находим:
- выражение для потенциала скоростей

$$\Phi = \dot{\eta}_c(t)(y - y_c) + \dot{\varphi}\,(t)\Phi_3^* + \dot{\beta}_{11}(t)\psi_{11}; \qquad (3)$$

- составляющую давления P_d, обусловленную ускорением емкости $\ddot{\eta}_c(t)$, $\ddot{\varphi}$ (t), в инерциальном пространстве $\overline{0}\xi\eta\zeta$, а также волновым движением жидкости $\ddot{\beta}_{11}(t)$

$$P_d = -\rho\left[\ddot{\eta}_c(y - h_1) + \ddot{\varphi}\,\Phi_3^* + \ddot{\beta}_{11}(t)\psi_{11} + g\frac{\partial\psi_{11}}{\partial y}\beta_{11}\right]; \qquad (4)$$

- интенсивность поперечной поверхностной нагрузки q_d и соответствующего момента q_d^0 (приложенного к j-му днищу), обусловленных действием на стенки отсека со стороны жидкости, а также реакциями связей между колебаниями стержня и волновых движений жидкости:

$$\left.\begin{aligned}
q_d(x_1,t) = \rho\Bigg\{&\ddot{h}_c\int_\Gamma (y_1 - h_1)n_{y_1}ds + \ddot{\varphi}\left[(x_1 - x_c)\int_\Gamma (y_1 - h_1)n_{y_1}ds + \int_\Gamma (\Phi_3^*)' n_{y_1}ds\right] + \\
&+\ddot{S}\left[\left(\vartheta(x_1) + (x_1 - x_c)\vartheta'(x_1)\right)\int_\Gamma (y_1 - h_1)n_{y_1}ds + \vartheta'(x_1)\int_\Gamma (\Phi_3^*)' n_{y_1}ds\right] + \ddot{\beta}_{11}\int_\Gamma \psi_{11}n_{y_1}ds + \beta_{11}g\int\frac{\partial\psi_{11}}{\partial y_1}ds\Bigg\}; \\
q_d^0(x_1,t) = \rho&\int_{G_j}(\vec{R}\times\vec{n}_1)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}ds,
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $\Phi_3^* = y_c x_1 - x_c y_1 + \tilde{\Phi}_3$; $(\Phi_3^*)' = \Phi_3^* - (x_1 - x_c)(y_1 - y_c)$; $\psi_{11} = \frac{l_1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{l_1}x_1\right)\frac{\mathrm{ch}\left[\frac{\pi}{l_1}(y_1 + R_0)\right]}{\mathrm{sh}(\pi b_1/l_1)}$; ρ – плотность жидкости; l_1 - длина полости; n_{y_1} - проекция на ось $0_1 y_1$ орта внешней нормали $\vec{n}$ к смоченной боковой поверхности полости; Γ - смоченный контур поперечного сечения полости; G_j - смоченная поверхность j -го днищ: $\vec{R}$ - радиус-вектор произвольной точки днища.

Применив δ - дельта-функции Дирака, формально объединяем сосредоточенные нагрузки с распределенными, записав погонную нагрузку $q(x_1,t)$ в виде обобщенной функции:

$$Q(x_1,t) = m(x) + q(x_1,t) + q^0(x_1,t),$$

где $m(x) = m_0(x) + \sum_{K=1}^{N} \delta_1(x - x_\kappa)m_\kappa$; $q(x_1,t) = \left[\delta_2(x - x_1^{(0)}) - \delta_2(x - x_1^{(0)} - l_1)\right]q_d(x_1,t)$;

$$q^{(0)}(x_1,t) = -\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_j \delta_3(x - x_j)q_{jd}^{(0)}(x_1,t);\ m_0(x) > 0 \text{ и кусочно непрерывна на } [0,L]; \tag{6}$$

$m_0(x) > 0$ **и кусочно непрерывна на** $[0,L]$; $m_\kappa > 0$ $x_\kappa \in (0,L)$, $K = 1,2,\ldots,N$ **и** $0 \le N \le \infty$;

$q_d > 0$ **и непрерывна на** $[0,l_1]$.

Рассматривая инерциальную нагрузку $q(x_1,t)$ как внешнюю, приложенную к балке статическую нагрузку, используя зависимости (5) и (6) получаем из (1) следующее интегро-дифференциальное уравнение, описывающее упругие поперечные колебания стержня с отсеком, частично заполненным жидкостью:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] + m(x)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + q(x_1,t) = q^{(0)}(x_1,t), \tag{7}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left[E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right]_{x=0,L} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_0 I_0(x)\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right)\right]_{x=0,L} = 0. \tag{8}$$

Для установления эквивалентности задачи (7)-(8) с интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода необходимо построить функцию Грина. Однако нетрудно заметить, что статический аналог задачи (7)-(8) обычной гриновской функции не имеет. Свободная система при $\lambda = 0$ имеет нетривиальное решение, превращая однородное уравнение в уравнение с непрерывным решением. Возникает необходимость построения обобщенной функции Грина.

Докажем, что $\forall\xi \in [0,L]$ *можно построить однозначную функцию двух переменных* $G(x,\xi)$, *непрерывную во всех* $x \in [0,L]$, $\xi \in (0,L)$ *и имеющую следующие свойства:*

1. $E_0 I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)$ *непрерывна по переменной x* на *замкнутом квадрате* $\mathcal{D} = \{(x,\xi) \mid 0 \le x,\xi \le L\}$ *и принадлежит классу* L_2 *на замкнутых треугольниках:* $0 \le x \le \xi \le L$, $0 \le \xi \le x \le L$.

2. Функция Грина симметрична

$$G(x,\xi) = G(\xi,t),\ (x,\xi) \in \mathcal{D}.$$

3. $\frac{\partial}{\partial x}E_0 I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)$ $\forall\xi \in [0,L]$ *непрерывна по переменной x в каждом из интервалов* $[0,\xi)$ и $(\xi,L]$, *за исключением* $x = \xi, x_1, \ldots x_N$, *где она имеет скачки на конечные величины* (см.(6)).

4. В каждом из интервалов $[0,\xi)$ и $(\xi,L]$ *функция Гр* $G(x,\xi)$ *удовлетворяет неоднородному уравнению и краевым условиям:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_0I_0(x)G(x,\xi)=\delta(x-\xi)+C_1(\xi)\tilde{q}(x)+C_2(\xi)x\tilde{q}(x) \tag{9}$$

$$1)\left[\frac{\partial}{\partial x}E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)\right]_{x=0}=0, \qquad 2)\left[\frac{\partial}{\partial x}E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)\right]_{x=L}=0; \tag{10}$$

$$1)\left[E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)\right]_{x=0}=0, \qquad 2)\left[E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)\right]_{x=L}=0; \tag{11}$$

$$\int\limits_{x=0}^{L}G(x,\xi)m_0(x)dx=0\,; \tag{12}$$

$$\int\limits_{x=0}^{L}G(x,\xi)xm_0(x)dx=0\,, \tag{13}$$

где $\tilde{q}(x)=m(x)+q(x_1,t)$,а $C_1(\xi)$и $C_2(\xi)$ - непрерывные функции, обеспечивающие совместность совокупности соотношений (9)—(13).

Интегрируя (9) в пределах от 0 до x и учитывая граничные условия $(10_{1)})$, находим

$$\frac{\partial}{\partial x}E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)=H_1(x-\xi)+C_1(\xi)\int\limits_{z=0}^{x}\tilde{q}(z)dz+C_2(\xi)\int\limits_{z=0}^{x}\tilde{q}(z)zdz\,, \tag{14}$$

где $H_1(x-\xi)$ - функция Хевисайда, обладающая следующими свойствами:

$$H_1(x-\xi)=\begin{cases}0 \text{ при } x<\xi;\\ 1 \text{ при } x\geq\xi.\end{cases} \tag{15}$$

Так как условие $(10_{1)})$выполнено, то сформулируем требования, предъявляемые к функциям $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$, накладываемые условием $(10_{2)})$:

$$0=H_1(L-\xi)+C_1(\xi)\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz+C_2(\xi)\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\,, \tag{16}$$

то есть,

$$\left(\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz\right)C_1(\xi)+\left(\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\right)C_2(\xi)=-1\,. \tag{17}$$

Интегрируя (14) в пределах от 0 до x и учитывая соотношения (6) и $(11_{1)})$, получаем:

$$E_0I_0(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}G(x,\xi)=(x-\xi)H_1(x-\xi)+C_1(\xi)\int\limits_{z_1=0}^{x}(x-z_1)\tilde{q}(z_1)dz_1+C_2(\xi)\int\limits_{z_1=0}^{x}(x-z_1)z_1\tilde{q}(z_1)dz_1\,. \tag{18}$$

Следовательно, граничное условие $(11_{1)})$ этим выражением удовлетворено. Поступая аналогично предыдущему, используя условие $(11_{2)})$, сформулируем требование, предъявляемое к функциям $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$:

$$0=(L-\xi)H_1(L-\xi)+C_1(\xi)\int\limits_{z=0}^{L}(L-z)\tilde{q}(z)dz+C_2(\xi)\int\limits_{z=0}^{L}(L-z)z\tilde{q}(z)dz\,. \tag{19}$$

Уравнение (19) совместно с (17) образуют систему двух линейных уравнений относительно неизвестных функций $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz\right)C_1(\xi)+\left(\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\right)C_2(\xi)=-1,\\&\left(\int\limits_{z=0}^{L}(L-z)\tilde{q}(z)dz\right)C_1(\xi)+\left(\int\limits_{z=0}^{L}(L-z)z\tilde{q}(z)dz\right)C_2(\xi)=-(L-\xi),\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

определитель которой никогда в нуль не обращается. Действительно, нетрудно показать, что

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix}\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz; & \int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\\ \int\limits_{z=0}^{L}(L-z)\tilde{q}(z)dz; & \int\limits_{z=0}^{L}(L-z)z\tilde{q}(z)dz\end{vmatrix}=\left(\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\right)^2-\left(\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz\right)\left(\int\limits_{z=0}^{L}z^2\tilde{q}(z)dz\right)\neq 0.\tag{21}$$

Имея в виду, что функция $\tilde{q}(z)$ подчиняется условиям (6), воспользуемся интегралом Стилтьеса [7]. Обозначим меру Стилтьеса интервала $[0,x]$ через $\sigma(x)\equiv\int\limits_{z=0}^{x}\tilde{q}(z)dz$. Тогда, произведя фильтрацию входящих в $\tilde{q}(z)$ δ - функции в соответствии с известным соотношением

$$\int\limits_{z=0}^{x}\delta(z-\xi)dz=\mathrm{H}(x-\xi)\equiv\begin{cases}0 \text{ if } x<\xi\\1 \text{ if } x\geq\xi,\end{cases}$$

и, учитывая одностороннюю непрерывность функции Хевисайда $\mathrm{H}(x-\xi)$ и свойства интеграла Стилтьеса, представим (21) в виде:

$$\Delta=\left(\int\limits_{z=0}^{L}zd\sigma(z)\right)^2-\left(\int\limits_{z=0}^{L}d\sigma(z)\right)\left(\int\limits_{z=0}^{L}z^2d\sigma(z)\right).\tag{22}$$

Применяем к первому члену правой части (22) неравенство Буняковского-Стилтьеса

$$\left|\int\limits_{z=0}^{L}\bar{f}_1(z)f_2(z)d\sigma(z)\right|^2\leq\left\|\int\limits_{z=0}^{L}|f_1(z)|^2d\sigma(z)\right\|\left\|\int\limits_{z=0}^{L}|f_2(z)|^2d\sigma(z)\right\|,$$

здесь $f_1(z),f_2(z)\in L_2[0,L]$, знак равенства достигается только в том случае, когда всюду на $[0,l]$ $f_1(z)=Cf_2(z)$, где C - константа. Полагая $f_1(z)=1$, $f_2(z)=z$, получаем

$$\left(\int\limits_{z=0}^{L}zd\sigma(z)\right)^2<\left(\int\limits_{z=0}^{L}d\sigma(z)\right)\left(\int\limits_{z=0}^{L}z^2d\sigma(z)\right).$$

Таким образом, для любого распределения $\tilde{q}(z)$, удовлетворяющего условиям (6), будет иметь место

$$\Delta=\left[\left(\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\right)^2-\left(\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz\right)\left(\int\limits_{z=0}^{L}z^2\tilde{q}(z)dz\right)\right]<0.$$

Следовательно, система (20) однозначно разрешима, а функции $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$, делающие совместными уравнения (9) и граничные условия (10), (11), существуют и единственны. При их вычислении воспользуемся результатами работы [6]. Тогда определитель

$$\Delta=\left(\int\limits_{z=0}^{L}z\tilde{q}(z)dz\right)^2-\left(\int\limits_{z=0}^{L}\tilde{q}(z)dz\right)\left(\int\limits_{z=0}^{L}z^2\tilde{q}(z)dz\right)\equiv\left[L_0^2-MI_0\right]$$

и решение системы (20) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} C_1(\xi) &= \frac{I_0 - \xi L_0}{L_0^2 - MI_0}; \\ C_2(\xi) &= \frac{\xi M - L_0}{L_0^2 - MJ_0}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где $M = \int\limits_{z=0}^{L} m_0(z)dz + \int \rho dt$ - полная масса «балка-жидкость»;

$L_0 = L_0^{(o)} + L_0^{(ж)} = \int\limits_{z=0}^{L} m_0(z)dz - \frac{4}{\pi^2}\rho l_1^2\sqrt{R_0^2 - h_1^2}(2y_c - R_0)$ - статический момент системы «балка-жидкость» относительно центра $x = 0$;

$$I_0 = I_0^{(o)} + I_0^{(ж)} = \int\limits_{z=0}^{L} z^2\tilde{q}(z)dz + \frac{1}{24}\rho R_0^2 l_1^2(4l_1 - h_1 - R_0)(2\theta_0 - \sin 2\theta_0) + m_{ж}(x_{c_1}^2 + y_{c_1}^2 - 2x_{c_1}x_1^0 - y_{c_1}y_1^0)$$

- момент инерции системы «балка-жидкость» относительно центра $x =$ O (рис. 1).

Подставляя значения функций $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ в уравнение (9) и дважды интегрируя по x, получаем:

$$G(x,\xi) = G_1(x,\xi) + C_3(\xi) + C_4(\xi), \tag{24}$$

где

$$G_1(x,\xi) = \mathrm{H}_1(x-\xi)\int\limits_{z=0}^{x}\frac{(x-z)(z-\xi)}{E_0 I_0(z)} + \int\limits_{z_2=0}^{x}\frac{x-z_2}{E_0 I_0(z_2)}\left[(z_2 - z_1)\int\limits_{z_1=0}^{z_2}\frac{I_0 - (z_1+\xi)L_0 + z_1\xi M}{L_0^2 - M_0 I_0}\tilde{q}(z_1)d(z_1)\right]dz_2, \tag{25}$$

$C_3(\xi)$ и $C_4(\xi)$ - неизвестные функции, которые должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия (12) и (13).

Подставляя (24) в (12) и (13), получаем следующую систему уравнений относительно $C_3(\xi)$ и $C_4(\xi)$:

$$\left.\begin{aligned} L_0^{(0)}C_3(\xi) + M^{(0)}C_4(\xi) &= -\int\limits_{x=0}^{L} G_1(x,\xi)m_0(x)dx, \\ I_0^{(0)}C_3(\xi) + L_0^{(0)}C_4(\xi) &= -\int\limits_{x=0}^{L} G_1(x,\xi)xm_0(x)dx. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Определитель этой системы совпадает с определителем системы (20), то есть ни при каком распределении $\tilde{q}(x)$ в нуль не обращается, следовательно, система (26) однозначно определяет значения величин $C_3(\xi)$, $C_4(\xi)$, обеспечивающих выполнение условий (12) и (13)

$$\left.\begin{aligned} C_3(\xi) &= \int\limits_0^L G_1(x,\xi)\frac{M^{(0)}x - L_0^{(0)}}{(L_0^{(0)})^2 - M^{(0)}I_0^{(0)}}m_0(x)dx, \\ C_4(\xi) &= \int\limits_{x=0}^{L} G_1(x,\xi)\frac{I_0^{(0)} - L_0^{(0)}x}{(L_0^{(0)})^2 - M^{(0)}I_0^{(0)}}m_0(x)dx. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, сформулированная выше теорема доказана. Обобщенная гриновская функция рассматриваемой задачи существует, единственна, вещественна, симметрична, то есть $G(x,\xi) = G(\xi,x)$. На квадрате $(0 \le x,\ \xi \le L)$ вместе со своей п р о и з в с $\frac{\partial}{\partial x}G(x,\xi)$ н а непрерывна как функция двух переменных, и задается соотношением:

$$G(x,\xi) = \mathrm{H}_1(x-\xi)\int\limits_{z=\xi}^{x}\frac{(x-z)(z-\xi)}{E^{(0)}I^{(0)}(z)}dz +$$

$$+\int\limits_{z_2=0}^{x}\frac{x-z_2}{E^{(0)}I^{(0)}(z)}\left[(z_2-z_1)\int\limits_{z_1=0}^{z_2}\frac{I_0-(\xi+z_1)L_0+\xi z_1 M}{L_0^2-MI_0}\tilde{q}(z_1)dz_1\right]dz_2+$$

$$+\int\limits_{z_1=\xi}^{L}\left[\int\limits_{z_2=\xi}^{z_1}\frac{(z_1-z_2)(z_2-\xi)}{E^0I^0(z_2)}\right]\frac{I_0^{(0)}-(x+z_1)L_0^{(0)}+xz_1M^{(0)}}{(L_0^{(0)})^2-M^{(0)}I_0^{(0)}}m_0(z_1)dz_1+$$

$$+\int\limits_{z_3=\xi}^{L}\left\{\int\limits_{z_2=0}^{z_3}\frac{z_3-z_2}{E^{(0)}I^{(0)}(z_2)}\left[\int\limits_{z_1=0}^{z_2}(z_2-z_1)\frac{I_0-(\xi+z_1)+\xi z_1M}{L_0^2-MI_0}\tilde{q}(z_1)dz_1\right]dz_2\right\}\times$$

$$\times\frac{I_0^{(0)}-(x+z_3)L_0^{(0)}+xz_3M^{(0)}}{(L_0^{(0)})^2-M^0I_0^{(0)}}m_0(z_3)dz_3. \qquad \mathbf{(28)}$$

Зная обобщенную функцию Грина $G(x,\xi)$ можно показать [2], что *частотная гржовская функция существует, единственна и представима соотношением:*

$$\Re(x,\xi;\lambda)=\frac{I_0-(x+\xi)L_0+x\xi M}{MI_0-L_0^2}\left(\frac{1}{-\lambda}\right)+\Gamma(x,\xi;\lambda), \qquad (29)$$

где $\Gamma(x,\xi;\lambda)$ - резольвента уравнения Фредгольма 2-го рода со статической функцией Грина $G(x,\xi)$ системы в качестве нагруженного ядра

$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=G(x,\xi)+\lambda\int\limits_{z=0}^{L}G(x,z)\Gamma(z,\xi;\lambda)m_0(z)dz. \qquad \mathbf{(30)}$$

Вводя итерированные ядра, соответствующие целым положительным степеням оператора G, обозначив основное ядро $G(x,\xi)$ через $G_1(x,\xi)$:

$$G_1(x,\xi)\equiv G(x,\xi);$$

$$G_2(x,\xi)\equiv\int\limits_{z=0}^{L}G(x,z)G_1(z,\xi)m_0(z)dz;$$

....

$$G_j(x,\xi)\equiv\int\limits_{z=0}^{L}G_{j-1}(x,z)G_1(z,\xi)m_0(z)dz \quad (j=2,3,...),$$

и используя теорему о разложении [8]

$$G^{(P)}(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(z)}{\lambda_\nu^P} \qquad (P=2,3,...), \qquad (31)$$

получаем ряд Неймана:

$$\Re(x,\xi;\lambda)=\frac{I_0-(x+\xi)L_0+x\xi M}{MI_0-L_0^2}\left(\frac{1}{-\lambda}\right)+G(x,\xi)+\lambda G_2(x,\xi)+\lambda^2\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^2(\lambda_\nu-\lambda)}. \qquad \mathbf{(32)}$$

Принимая во внимания соотношения (28-30) и разложение (31); суммируя появляющиеся при этом в (32) геометрические ряды, получаем аналитические зависимости частотной функции Грина от λ, в форме разложения функц $\Re$ па простые дроби:

$$\left.\begin{aligned}\Re(x)&=\frac{I_0-(x+\xi)L_0+x\xi M}{MI_0-L_0^2}\left(\frac{1}{-\lambda}\right)+\lambda^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda)};\\ \Re(x)&=\frac{I_0-(x+\xi)L_0+x\xi M}{MI_0-L_0^2}\left(\frac{1}{-\lambda}\right)+\sum_{j}^{p}\lambda^{j-1}G_j(x,\xi)+\lambda^p\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\psi_\nu(x)\psi_\nu(\xi)}{\lambda_\nu^p(\lambda_\nu-\lambda)},\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{(33)}$$

чем и заканчивается решение поставленной задачи.

Литература

1. Шеповалов Е.Н. Эффективные математические методы исследования колебаний сложных механических систем, содержащих упругие и жидкие среды // Наука и технология: Серия «Итоги диссертационных исследований». - М.: РАН, 2003. - С. 119-152.

2. Шеповалов Е.Н. Некоторые алгебраические аспекты метода системного анализа в общей теории сложных механических систем // Вестник ЮУрГУ. Серия « Математика, физика, химия». - 2006. - Вып. 7. - № 7 (62). - С. 157-168.

3. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х частях. Часть I: Статика. - М.: Высшая школа, 1987.-320 с.

4. Светлицкий В.А. Механика стержней. В 2-х частях. Часть П: Динамика. - М.: Высшая школа, 1987.-304 с.

5. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах / Под ред. чл.-корр. АН СССР В.В. Болотина. - М.: Машиностроение, 1978. - Т. 1. - 352 с.

6. Шеповалов Е.Н. Исследование динамической нагруженности систем с упруго-жидкими звеньями // Неоднородные конструкции: Труды Уральского семинара. - Екатеринбург: УрО РАН, -1999.-С. 71-81.

7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. - М.: Наука, 1968.-720 с.

8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. В четырех частях. - М.: Наука, 1974. - Т. IV. - 4.1.-336 с.

Поступила в редакцию 29 марта 2006 г.