

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ ПРОЦЕДУРА СЛУЧАЙНОЙ ВЫБОРКИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Н.А. Скоркин, В.Ф. Степанов, М.А. Шестирикова

Предлагается метод TWS численного решения задач механики сплошной среды, основанный на использовании эйлеровских конечно-разностных сеток. Слежение за движением контактных разрывов по эйлеровской сетке осуществляется с помощью процедуры случайной выборки. Счёт шага по времени разбивается на два этапа. На первом этапе по схеме Неймана определяются величины в центрах ячеек. На втором этапе расчет переноса этих величин через границу ячеек осуществляется по схеме случайной выборки [1-3]. Приводятся результаты тестирования метода.

На примере линейного уравнения переноса продемонстрируем идею случайной выборки при дискретном представлении дифференциального уравнения переноса. Линейное уравнение переноса для функ $u(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const}, a > 0. \quad (1)$$

Простая явная схема для этого уравнения записывается следующим образом

$$u_i^{n+1} = \chi u_{i-1}^n + (1 - \chi) u_i^n, \quad \chi = \frac{a \Delta t}{\Delta x}. \quad (2)$$

Здесь i - номер узла на эйлеровской сетке, n - номер временного слоя, $\Delta x = x_i - x_{i-1}$, Δt - шаг счёта по времени t . Если посмотреть на уравнение (2), то можно увидеть, что значение функции $u(x, t)$ на $(n+1)$ временном слое u_i^{n+1} есть средневзвешенное значение известных величин u_i^n и u_{i-1}^n . Это приводит к мысли: для вычисления u_i^{n+1} использовать методы теории вероятностей. Из теории вероятностей известно, что для случайной дискретной величины ξ , принимающей с вероятностью p_j при проведении N испытаний значения ξ_j в j -м испытании, математическое ожидание $\bar{\xi}$ равно $\bar{\xi} = \sum_{j=1}^N p_j \xi_j$. Если с функцией $u = u(x_i, t_{n+1})$ связать случайную величину

u_i^{n+1} , которая может принимать только два значения: u_i^n с вероятностью $1 - \chi$ и u_{i-1}^n с вероятностью χ , то математическое ожидание случайной величины u_i^{n+1} будет полностью совпадать с выражением (2). Отсюда для линейного одномерного уравнения переноса (1) получается следующий вероятностный алгоритм:

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_{i-1}^n & \text{с вероятностью } p = \chi, \\ u_i^n & \text{с вероятностью } p = 1 - \chi, \end{cases} \quad (3)$$

где p - вероятность реализации события. Алгоритм будет полностью определён, если указать способ моделирования случайной величины. Пусть ξ - случайное действительное число, равномерно распределённое в интервале $(0, 1)$. Тогда вычислительный алгоритм определим так:

$$u_i^{n+1} = \begin{cases} u_{i-1}^n, & \text{если } \xi < \chi, \\ u_i^n, & \text{если } \xi \geq \chi. \end{cases} \quad (4)$$

Применение вероятностной схемы типа (4) к системе нелинейных уравнений механики сплошной среды, её развитие и доработка осуществлены авторами работ [2, 3]. Перейдём к изложению сказанного. Расчёт временного шага Δt разбивается на два этапа: на лагранжевом этапе

численно по схеме с искусственной вязкостью (схема Неймана) решаются уравнения механики сплошной среды без конвективных слагаемых. На втором этапе решаются уравнения переноса по схеме (4). Иначе говоря, осуществляется расщепление уравнений по физическим процессам. Итак, на первом этапе, например, по разностной схеме Неймана пусть определены величины: \hat{u}_i , $\hat{p}_{i+1/2}$, $\hat{\varepsilon}_{i+1/2}$, $\hat{p}_{i+1/2}$ и др. Здесь u - скорость, ρ - плотность, p - давление, ε - удельная внутренняя энергия. Индексом i обозначены величины в узлах эйлеровской сетки, а индексом $i+1/2$ - в середине эйлеровых ячеек. После определения величин первого этапа счёта шага (величины с крышечкой \wedge) разыгрывается случайное число ξ^n , равномерно распределенное на промежутке (0, 1). Вероятностный алгоритм для второго этапа (численное решение уравнений переноса) для величин, определяемых в центре ячейки, имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{а) для } \hat{u}_{i+1/2} > 0 & \qquad \text{б) для } \hat{u}_{i+1/2} < 0 \\ \rho_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \hat{\rho}_{i-1/2}, & \text{если } \xi^n < \Delta t \frac{\hat{u}_i}{\Delta x}, \\ \hat{\rho}_{i+1/2}, & \text{если } \xi^n > \Delta t \frac{\hat{u}_i}{\Delta x}, \end{cases} & \rho_{i+1/2}^{n+1} = \begin{cases} \hat{\rho}_{i+3/2}, & \text{если } (1-\xi^n) > (1+\Delta t \frac{\hat{u}_i}{\Delta x}), \\ \hat{\rho}_{i+1/2}, & \text{если } (1-\xi^n) < (1+\Delta t \frac{\hat{u}_i}{\Delta x}). \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Для расчёта переноса скоростей - величин, определяемых в узлах разностной сетки, апробированным [2] является следующий алгоритм:

$$\begin{aligned} \text{а) для } \hat{u}_i > 0 & \qquad \text{б) для } \hat{u}_i < 0 \\ u_i^{n+1} = \begin{cases} \hat{u}_{i-1}, & \text{если } \max(\hat{u}_{i-1}, \hat{u}_i) \frac{\Delta t}{\Delta x} > \xi^n, \\ \hat{u}_i, & \text{если } \max(\hat{u}_{i-1}, \hat{u}_i) \frac{\Delta t}{\Delta x} < \xi^n, \end{cases} & u_i^{n+1} = \begin{cases} \hat{u}_{i+1}, & \text{если } (1+\min(\hat{u}_i, \hat{u}_{i+1})) \frac{\Delta t}{\Delta x} < (1-\xi^n), \\ \hat{u}_i, & \text{если } (1+\min(\hat{u}_i, \hat{u}_{i+1})) \frac{\Delta t}{\Delta x} > (1-\xi^n). \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

Некоторые примеры решения одномерных задач газовой динамики с помощью выше изложенной вероятностно конечно-разностной процедуры представлены на рис. 1-2. На этих рисунках все параметры в безразмерном виде.

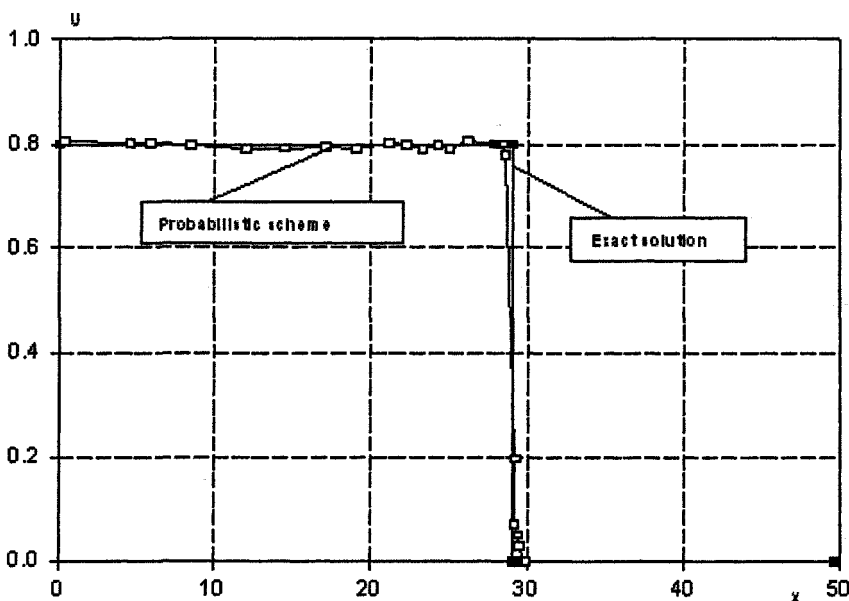


Рис. 1. Профиль скорости частиц среды ударной волной

На рис. 1 представлено решение задачи о движении сильной ударной волны по идеальному газу, имеющему уравнение состояния

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon.$$

Начальная плотность среды (плотность перед фронтом сильного разрыва) $\rho_0 = 2,67$, скорость движения ударной волны $D = 1$. На рисунке представлен профиль скорости частиц U среды за сильным разрывом. Решение, приведённое на рис. 1 в виде графика-ступеньки, есть точное решение (Exact solution), а решение, полученное по вероятностной схеме (Probabilistic scheme), представлено на рисунке кривой, помеченной маркерами-квадратиками. Усматривается вполне удовлетворительное согласование решений.

На рис. 2 на некоторый момент времени приведены результаты расчёта задачи о распаде произвольного разрыва по апробированной схеме Неймана (Newman's scheme) и по вероятностной (Probabilistic scheme). В процессе распада произвольного разрыва в идеальном газе появляются ударная волна, волна разрежения и контактный разрыв, что отражено на рисунке.

В начальный момент времени состояние газа определяется следующими параметрами:

при $x < 0$ $\rho = 1$; $p = 1$; $U = 0$; $\gamma = 1,4$;

при $x > 0$ $\rho = 0,125$; $p = 0,1$; $U = 0$, $\gamma = 1,4$.

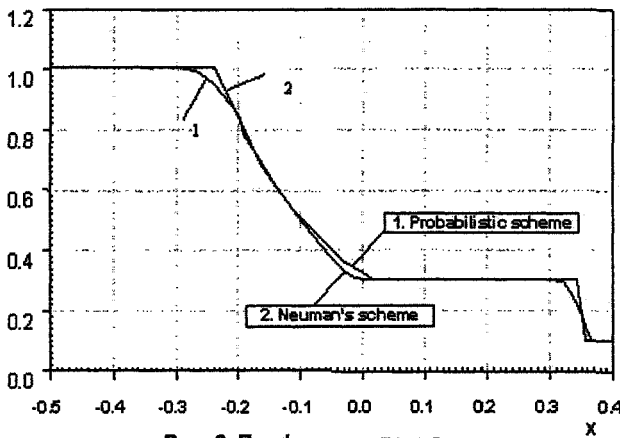


Рис. 2. Профиль давления

Здесь x – координата, ρ – плотность, p – давление, U – скорость, γ – показатель изэнтропы. Задача решалась при следующих параметрах разностной сетки: коэффициент линейной искусственной вязкости $Q_1 = 1$; коэффициент квадратичной вязкости $Q_2 = 0,5$; число Куранта $\nu = 0,8$. Из рисунка 2 следует, что вероятностная схема даёт решение, согласующееся с решением, полученным по апробированной схеме Неймана.

Другое приложение предлагаемой здесь вычислительной схемы связано с решением стационарных задачи упругопластичности.

На рис. 3 в графическом виде приведены результаты решения задачи о стационарном распределении напряжений в толстом сферическом сосуде. Толстая сферическая оболочка нагружена внутренним давлением [4]. Внутренний радиус оболочки $R_1 = 10$ м, внешний $R_2 = 20$ м.

Давление внутри полости $P_1 = 0,1$ ГПа, на внешней поверхности $P_2 = 0$. При пределе текучести $Y_0 = 0,0865$ ГПа материал переходит в пластическое состояние в области между внутренней

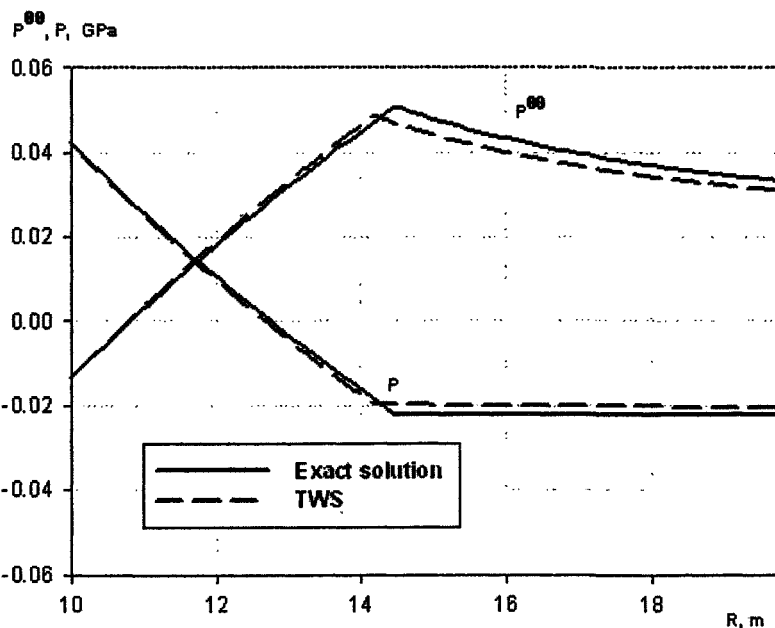


Рис. 3. Распределение напряжений по радиусу сферического сосуда

поверхностью и сферой радиуса $R_0 = 14,49$ м. Вне этой области остается упругим. Согласно [4] распределение напряжений в пластической области $R_1 \leq R \leq R_0$ задается уравнениями

$$p^{rr} = 2Y_0 \ln(R/R_1) - P_1,$$

$$p^{\theta\theta} = p^{rr} + Y_0,$$

$$P = -p^{rr} - 2Y_0/3.$$

В упругой области $R_0 \leq R \leq R_2$

$$p^{rr} = \bar{P} \left(1 - (R_2/R)^3 \right),$$

$$p^{\theta\theta} = \bar{P} \left(1 + 0.5(R_2/R)^3 \right),$$

$$\bar{P} = -q R_0^3 / (R_2^3 - R_0^3),$$

$$q = 2Y_0 \ln(R_0/R_1) - P_1,$$

$$P = -\bar{P}.$$

Уравнение состояния бралось в виде $P = K(\rho/\rho_0 - 1)$. Начальная плотность $\rho_0 = 2 \text{ г/см}^3$, модуль Юнга $K = 33,333 \text{ ГПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$.

Сферически симметричная (одномерная) задача о распределении напряжений в толстой оболочке решалась численно в цилиндрических координатах, т.е. в двухмерной постановке. Для подавления инерционных эффектов через промежутки времени 1 мс скорости полагались равными нулю. Распределения давления p и азимутального напряжения $p^{\theta\theta}$ в оболочке, полученные в расчете по вероятностной схеме (прерывистая кривая TWS) на момент 60 мс (момент установления напряжений), сравниваются с точным (сплошная кривая Exact solution) решением, см. рис. 3. Из рисунка следует, что имеет место быть вполне удовлетворительное согласование сравниваемых параметров. Надо отметить, что результат удивителен. Дело в том, что искалось стационарное решение по вероятностному, существенно нестационарному по определению, алгоритму TWS.

Однако описанный выше численный метод TWS не является достаточно надежным при расчете положения границ различных веществ. Дело в том, что для расчета перемещения термодинамических параметров задачи, проводимого по схеме случайной выборки (5), и для расчета перемещения кинематических параметров задачи по схеме (6), используются разные скорости. Это обусловлено тем, что разностной ячейке приписана одна плотность $\rho_{i+1/2}$, одно давление $p_{i+1/2}$, одна энергия $\varepsilon_{i+1/2}$, в то время как ячейка (одномерная) имеет две скорости u_i и u_{i+1} . это иногда в силу накопления вычислительных ошибок (например, в результате округления чисел в компьютерном коде) приводит к рассогласованию движения поля скоростей и поля термодинамических параметров по сетке.

Устранить рассогласованность можно, если определять скорости в центре ячеек, как термодинамические параметры. К сожалению, в результате получаются разностные схемы, обладающие сильными дисперсными свойствами, что крайне нежелательно при расчете задач упругопластичности. Выход был найден при использовании SPH-идеологии на первом лагранжевом этапе расчета. SPH-метод предполагает вычисление всех параметров в центре частицы, а это обеспечивает отсутствие рассогласования (при расчете на втором эйлеровском этапе вычислений шага по времени) перемещения скоростей и термодинамических параметров.

Приступим к изложению полученного в результате метода SPH&МК, на примере одномерной газовой динамики. Будем предполагать, что в центре разностной сетки определяются все параметры задачи. Расчёт временного шага Δt разбивается на два этапа: на лагранжевом этапе численно по SPH-методу решаются уравнения газовой динамики без конвективных слагаемых. На втором этапе решаются уравнения переноса по схеме (5).

Мы не будем подробно излагать SPH-метод, лишь укажем, как он встраивается в конечно-разностную схему со случайной выборкой. В начальный момент времени строится разностная сетка. Для каждой ячейки (лишь однажды!) определяется список соседних ячеек, попавших в конечную область - носитель сглаживающей функции SPH-метода. Обычно в качестве сглаживающей функции берется B -сплайн в форме Монагана и Латтанцио [5]

$$W(r, h) = \frac{1}{\pi h^3} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}v^2 + \frac{3}{4}v^3, & 0 \leq v \leq 1; \\ \frac{1}{4}(2-v)^3, & 1 < v < 2; \\ 0, & 2 \leq v. \end{cases}$$

Здесь где $r = |x_i - x_j|$ - расстояние от центра текущей i -й ячейки (частицы) до соседней j -й ячейки, $v = r/h$, h - область определения сглаживающей функции W . Разностные уравнения, например, для уравнения импульсов на первом этапе счета шага Δt в форме SPH-аппроксимации для задач гидродинамики в одномерном случае имеют вид [1-4]

$$\frac{d\hat{u}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W(|x_i - x_j|, h)}{\partial x},$$

В этих уравнениях m_j есть масса j -й ячейки. После определения по схеме (7) параметров первого этапа счёта шага разыгрывается случайное число $\xi^n \in (0,1)$. И алгоритм случайной выборки для второго этапа счёта шага по времени для всех величин теперь имеет единый вид (5). Для иллюстрации возможностей предлагаемого метода рассмотрим задачу о распадении произвольного разрыва в идеальном газе. Начальные значения параметров газа слева и справа от поверхности контактного разрыва взяты из работы [6], там же приведены формулы для расчета точного решения на моменты времени $t > 0$. Расчетная область и число ячеек в ней в полном соответствии с цитированной работой [6]. Результаты расчетов для удельной внутренней энергии на момент времени $t=4$ мс представлены на рисунке 4. При расчете распределения удельной внутренней энергии и давления по стандартному варианту SPH-метода на поверхности контактного разрыва возникает скачок энергии и давления, см. рис.4. При расчете по вероятностной схеме SPH&МК скачок отсутствует.

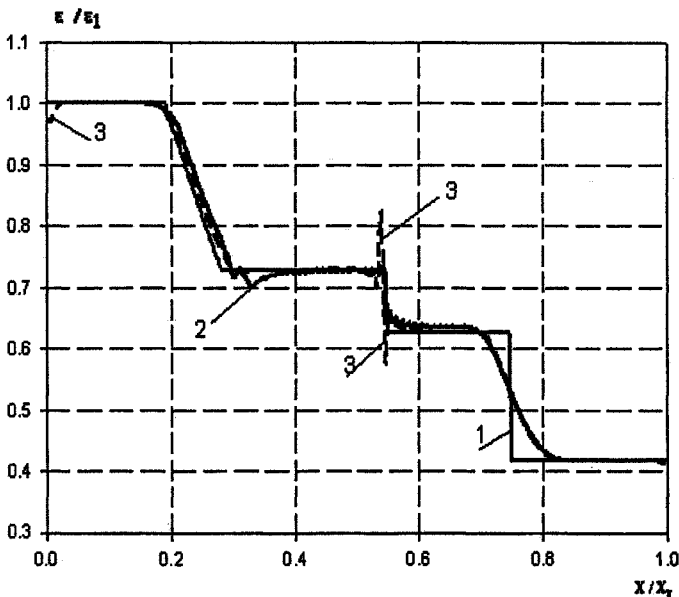


Рис. 4. Распределение внутренней энергии на конечный момент времени:
1 – точное решение; 2 – решение по методу SPH&МК;
3 – SPH, стандартный вариант

В расчетах по вероятностной схеме SPH&МК по причине наличия разностной сетки поиск соседей осуществляется один раз в начальный момент времени. Перемещение частиц по сетке осуществляется по схеме со случайной выборкой (5). Вследствие этого расчет задачи по вероятностной схеме приблизительно в 10 раз быстрее по времени, чем расчет по SPH-методу. В расчетах использовалась только квадратичная вязкость, предложенная в работе [6],

$$q = -80\rho_i(D_i \operatorname{div} u_i)^2.$$

Численные методы, использующие SPH-идеологию, особенно эффективны в таких задачах, как расчет проникания тел в преграды, задачи о заглубленных взрывах, задачи астрофизики и т.п.

При разработке осушителей природного газа, работающих на принципе дросселирования давления и представ-

ляющих собой трубу переменного сечения, интерес представляет распределение параметров течения газа по длине трубы. Первоначально покоящийся газ в трубе переменного сечения, каковой является, например, сопло Лавалья, разгоняется до скорости звука в горловом сечении, потом расширяется в сверхзвуковой части сопла при заданном давлении на срезе сопла. Из всех уравнений газовой динамики только в уравнение неразрывности входит зависимость $S(x)$, описывающая площадь сечения трубы как функцию координаты x точки, расположенной на оси симметрии трубы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \rho u \frac{S'(x)}{S(x)} = 0.$$

Остальные уравнения имеют стандартный вид. Для расчетов были опробованы 4 схемы: выше изложенная TWS, Моретти, МакКормака и Лакса-Вендроффа [7]. Схемы МакКормака и Лакса-Вендроффа дали схожие результаты, поэтому на рис. 5. они идентифицированы одним маркером «McCormack». Длина трубы бралась равной 3 м. Образующая сопла описывалась кривой $y = x/2 + 1/2$, $0 < x \leq 3$ м. В качестве газа рассматривался идеальный газ с уравнением состояния $p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, $\gamma = 1,4$.

В начальный момент времени газ в трубе покоится, давление $p = 20$ атм. На правом конце трубы поддерживалось давление $p = 0,75 p^*$. Граничные условия (на входе сопла и на срезе со-

пла) для скорости $U(x)$ задавались в виде $\frac{\partial U(x)}{\partial x} = 0$. На рис. 5 приведены результаты расчетов

распределения скорости U по длине трубы x . Результаты расчетов показали, что схемы Мак-Кормака и Лакса-Вендроффа обладают сильным сглаживающим эффектом и при расчете задач на установление они непригодны.

Численный метод Моретти, использующий информацию о характеристических направлениях

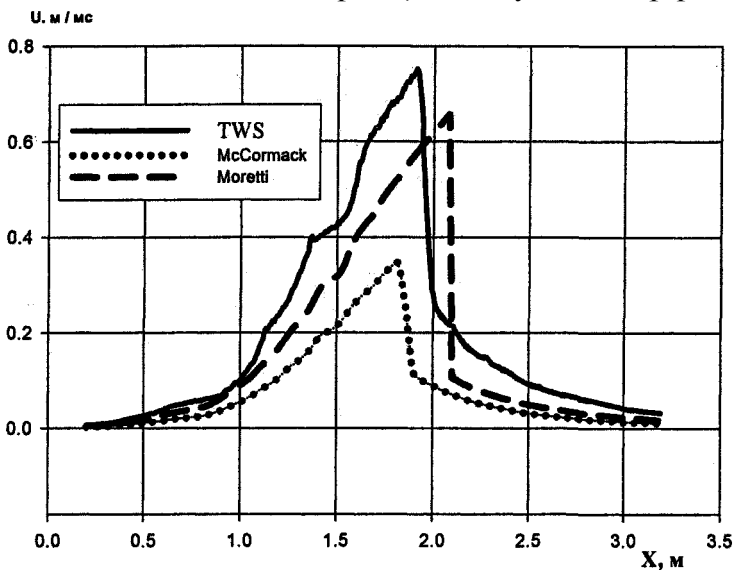


Рис. 5. Распределение скорости по длине сопла

кой системы уравнений газовой динамики, наиболее точен. Схема TWS дала результаты расчетов, близкие к тем, что получены по схеме Моретти. Таким образом, при проведении расчетов движения идеального газа в квазиодномерной постановке предпочтение следует отдать схеме Моретти.

Однако применение этой схемы в многомерном случае или, при использовании сложного по конструкции уравнения состояния, применение схемы TWS проще. Связано это с тем, что схема Моретти использует информацию о характеристических направлениях. А для этого необходимо уравнения

движения записывать в специальном

виде, т.е. уравнение состояния в вычислительном коде затруднительно представить в виде отдельного программного модуля.

Далее на рис. 6 приводится сравнение результатов расчетов, полученных по двухмерной программе TWS и по квазиодномерной схеме Моретти. Рассматривалось движение в трубе диаметром 57 мм, длиной 320 мм, на

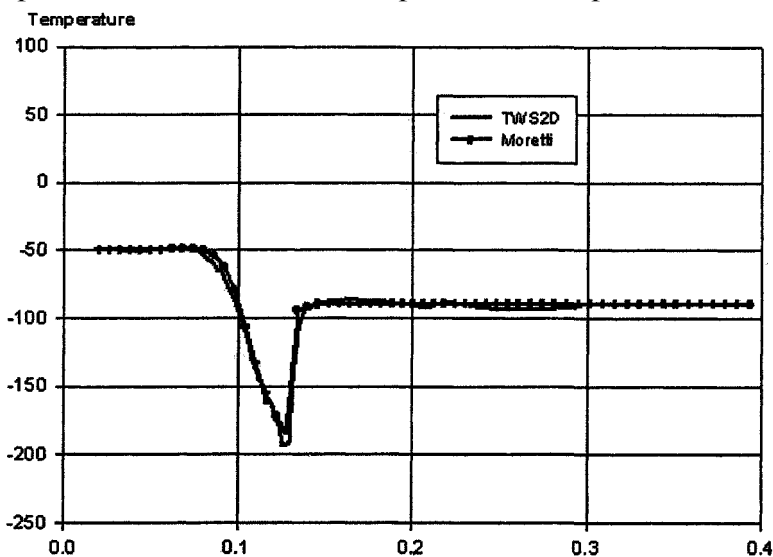


Рис. 6. Распределение температуры по длине трубы

оси которой на расстоянии 100 мм от левого конца располагался дроссель.

Дроссель - представлял тело, полученное вращением сегмента окружности радиуса 50 мм.

Высота сегмента 25 мм. Минимальный зазор между дросселем и поверхностью трубы получился равным 3 мм.

На рис. 6 представлены распределения температуры (шкала Цельсия). На этом рисунке маркер «TWS2D» соответствует двумерным расчетам по разностной схеме TWS. Маркеру «Moretti» соответ-

ствует расчетная кривая, полученная по квази одномерной программе, в которой реализована конечно-разностная схема Моретти. Граничное условие на левом конце трубы такое же, как в выше приведенном случае сопла Лавала. На правом конце трубы поддерживалось давление $p = 0,5 p^*$. Видно вполне удовлетворительное согласование сравниваемых параметров. Из этого следует, что двухмерная вычислительная программа TWS пригодна для решения рассмотренных задач.

Расчеты по вычислительной методике SPH&МК не проводились в силу неспецифичности задачи для данной численной процедуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере, проект № 443бр/6842 от 29.06.2006 г.

Литература

1. Сод Г. Обзор некоторых разностных методов для консервативных нелинейных гиперболических систем // J. of Contr. Phys. - 1978. - V.27. - № 1. - P. 1-14.
2. Модификация метода Глимма к задачам проникания / СТ. Андреев, В.В. Башуров, В.А. Свидинский, Н.А. Скоркин // ВАНТ, серия «Методики и программы численного решения задач математической физики». - 1985. - Вып. 3. - С. 80-88.
3. Скоркин Н.А. Об одной конечно-разностной схеме для задач механики сплошной среды // Доклады международной конференции «IV Забабахинские научные чтения». - Снежинск: РФЯЦ - ВНИИТФ, 1995. - С. 277-279.
4. Качалов Л.М. Основы теории пластичности. - М.: Наука, 1969. - С.103-105.
5. Libersky L. D., Petschek A.G. etc. High Strain Lagrangian Hydrodynamics (3D SPH code for Dynamic Material response) // J. of Contr. Phys. - 1993. - № 109. - P. 67-75.
6. Паршиков А.Н. Применение решения задачи Римана в методе частиц // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1999. - Т. 396. - № 7. - С. 1216-1225.
7. Флетчер К.А. Вычислительные методы в динамике жидкостей. - М.: Мир, 1991, Т. 2. - С. 172-175, С. 186-190.

Поступила в редакцию 9 октября 2006 г.