КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.9

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ХОФФА НА ГРАФЕ

А.Г. Дыльков

В работе рассматривается задача оптимального управления решениями одной неклассической задачи для уравнений Хоффа, заданных на конечном связном ориентированном графе. Данную задачу мы редуцируем к начально-конечной задаче для абстрактного уравнения соболевского типа, подобрав соответствующим образом функциональные пространства. Нами установлено существование и единственность сильного решения начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа. Показано существование и единственность оптимального управления решениями данной задачи. Полученные абстрактные результаты применены к одной линейной модели Хоффа на графе, и установлены существование и единственность решения задачи оптимального управления. В статье представленны результаты вычислительного эксперимента, основанного на полученных теоретических данных. Для построения приближенных решений используется метод Галеркина. В работе используются идеи и методы, разработанные Г.А. Свиридюком и его учениками.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, начально-конечная задача, оптимальное управление, линейное уравнение Хоффа.

Введение

На конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}; \mathfrak{E})$, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ – множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_j\}$ – множество ребер, причем каждое его ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$, рассмотрим уравнения

$$\lambda_j x_{jt} + x_{jtss} = \alpha_j x_j + u_j, \ \lambda_j \in \mathbb{R}_+, \alpha_j \in \mathbb{R} \tag{1}$$

с условиями

$$x_j(0,t) = x_k(0,t) = x_m(l_m,t) = x_n(l_n,t), \qquad \sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j x_{js}(0,t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k x_{ks}(l_k,t) = 0, \tag{2}$$

$$P_{in}(x(0) - x_0(s)) = 0, \quad P_{fin}(x(\tau) - x_\tau(s)) = 0, \tag{3}$$

где P_{in}, P_{fin} – некоторые специальным образом построенные проекторы [1], $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ – множество ребер с началом (концом) в вершине V_i, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}$ – некоторое гильбертово пространство, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Уравнения (1) на графе моделируют динамику выпучивания двутавровой балки в конструкции.

Задачу (1) – (3), как и многие другие начально-краевые задачи для уравнений и систем уравнений, неразрешенных относительно производной по времени, удобно рассматривать в рамках абстрактного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu, \quad \ker L \neq \{0\}, \tag{4}$$

где функции x, y и u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, а оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, функции u, y подлежат дальнейшему определению. Подходящим математическим аппаратом для изучения таких задач является теория вырожденных (полу)групп операторов [2]. В данной работе мы будем рассматривать *начально-конечную задачу*, т.е. линейное уравнение соболевского типа (4) с условиями (3). Начально-конечные задачи впервые были исследованы в работах Г.А. Свиридюка и С.А. Загребиной [1], однако полученные ими классические решения мало пригодны для техники гильбертовых пространств, поэтому в данной работе будем искать другие решения и использовать их для реализации вычислительного эксперимента.

Будем искать пару $(\hat{x},\hat{u}) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, для которой выполняется соотношение

$$J(\hat{x},\hat{u}) = \inf_{(x,u)\in\mathfrak{X}\times\mathfrak{U}_{ad}} J(x,u), \tag{5}$$

где все пары (x,u) удовлетворяют задаче (3), (4), $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое подмножество допустимых управлений в гильбертовом пространстве управлений $\mathfrak{U}$, а $J(x,u)$ – некоторый специальным образом построенный функционал качества. Оптимальное управление решениями задачи Коши для линейных уравнений (4) впервые изучалось в [2]. В настоящее время методами оптимального управления активно исследуются задачи о восстановлении динамически искаженного сигнала – задачи оптимального измерения [3].

1. Абстрактная схема

Пусть $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а операторы $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Z})$, функции $u : (0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{U}$, $y : (0,\tau) \subset \mathbb{R}_+ \to \mathfrak{Y}\,(\tau < \infty)$ подлежат дальнейшему определению. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{Y};\mathfrak{X})\}$, L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M, соответственно правую $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ и левую $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ L-резольвенты оператора M, и пусть оператор M (L,p)-ограничен [2].

Пусть L-спектр оператора M представим в виде $\sigma^L(M) = \sigma^L_{fin}(M) \cup \sigma^L_{in}(M)$, $\sigma^L_{fin}(M) \cap \sigma^L_{in}(M) = \emptyset$. Построим проекторы [1]

$$P_{fin} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu, \quad P_{in} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu - P_{fin}.$$

Здесь контур $\gamma \subset \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L_{fin}(M)$, а контур Γ – $\sigma^L(M)$.

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения* (4)*, если она п. в. на* $(0,\tau)$ *обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения* (4) *назовем сильным решением начально-конечной задачи* (3), (4)*, если оно удовлетворяет* (3).

Построим пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}$, которое является гильбертовым в силу гильбертовости $\mathfrak{Y}$ со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1}\int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Теорема 1. [4] *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи* (3), (4).

Построим функционал качества

$$J(x,u) = \mu\sum_{q=0}^{1}\int_0^\tau \|z^{(q)} - z_d^{(q)}\|^2_{\mathfrak{Z}}dt + \nu\sum_{q=0}^{k}\int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)}\right\rangle_{\mathfrak{U}} dt, \quad z = Cx, \tag{6}$$

где $\mu, \nu \geq 0$, $\mu + \nu = 1$, $0 \leq k \leq p+1$, $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+1$ – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_d = z_d(t,s)$ – плановое наблюдение из некоторого гильбертова пространства наблюдений $\mathfrak{Z}$, и рассмотрим задачу оптимального управления (3) – (5), где $\mathfrak{U}_{ad} = H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U}) \subset H^{p+1}(\mathfrak{U})$, а пространство $H^{p+1}(\mathfrak{U})$ построено аналогично $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$.

Определение 2. *Вектор-функцию* $\hat{u} \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ *назовем оптимальным управлением решениями задачи* (3), (4), *если*

$$J(\hat{x}, \hat{u}) = \min_{(x,u) \in \mathfrak{X} \times H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})} J(x,u),$$

где пары $(x,u) \in \mathfrak{X} \times H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ *удовлетворяют* (3), (4).

Теорема 2. [4] *Пусть оператор* M (L,p)*-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$*. Тогда для любых* $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ *существует единственное оптимальное управление решениями задачи* (3), (4).

2. Линейная модель Хоффа на графе

Для редукции задачи (1) – (3) к задаче (3), (4) введем в рассмотрение гильбертово пространство $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, ..., g_j, ...) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$ со скалярным произведением $\langle g, h \rangle = \sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} g_j h_j ds$ и банахово пространство $\mathfrak{X} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_j, ...) : x_j \in W_2^1(0, l_j)$ и выполнено первое условие из (2)$\}$ с нормой $\|x\|_{\mathfrak{X}}^2 = \sum\limits_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int\limits_0^{l_j} (x_{js}^2 + x_j^2) ds$. Обозначим через $\mathfrak{Y}$ сопряженное к $\mathfrak{X}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство. Построим операторы $\langle Ax, y \rangle = \sum\limits_j d_j \int\limits_0^{l_j} (x_{js} y_{js} + b_j x_j y_j) ds$, $x, y \in \mathfrak{X}$, $b_j \in \mathbb{R}_+$ – произвольные константы; $\langle Lx, y \rangle = \sum\limits_j d_j (\lambda_j + b_j) \int\limits_0^{l_j} x_j y_j ds - \langle Ax, y \rangle$; $\langle Mx, y \rangle = \sum\limits_j \alpha_j d_j \int\limits_0^{l_j} x_j y_j ds$; $A, L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, причем спектр $\sigma(A)$ оператора A положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

Лемма 1. *Оператор* M $(L,0)$*-ограничен, если выполнено одно из двух условий*
(i) $\ker L = \{0\}$;
(ii) $\ker L \neq \{0\}$, $\alpha_j \neq 0$ *и имеют одинаковый знак при любом* j.

Начально-конечная задача (3) примет вид

$$\sum_{\mu_k \in \sigma_{in}^L(M)} \langle (x(0) - x_0), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \quad \sum_{\mu_k \in \sigma_{fin}^L(M)} \langle (x(\tau) - x_\tau), \varphi_k \rangle \varphi_k = 0, \tag{7}$$

где φ_k – ортонормированные собственные функции краевой задачи (2) для оператора L.

Введем в рассмотрение пространство $H^1(\mathfrak{U}) = \{u = (u_1, u_2, ... u_j, ...) : \dot{u}_j \in L_2(0, \tau; (0, l_j))\}$. Построим операторы $\left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle = \sum\limits_{E_j \in E^\alpha(V_i)} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_{jkq} (u_{jk}^{(q)}(t))^2$, ν_{jkq} – положительные числа.

Теорема 3. *При любых* $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$ *одного знака,* $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$, $u \in H_\partial^{p+1}(\mathfrak{U})$ *существует единственное сильное решение задачи* (1), (2), (5), (7).

3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим линейные уравнения Хоффа (1) на ориентированном графе, состоящем из двух соединенных ребер и трех вершин, с начально-конечными условиями (7). Решения $x_j(t,s)$, $j=1,2$ данной задачи будем искать в виде галеркинских сумм

$$x_1^N(t,s)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t)\varphi_i(s), \quad x_2^N(t,s)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t)\psi_i(s),$$

где $\varphi_i(s)$ и $\psi_i(s)$ – собственные функции задачи Штурма – Лиувилля на графе. При $N=3$

$$\begin{aligned} \varphi_1=1, \quad \varphi_2=\cos s, \quad \varphi_3=\cos\frac{s}{2}, \\ \psi_1=1, \quad \psi_2=-\cos s, \quad \psi_3=-\sin\frac{s}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Оптимальное управление $u_j(t,s)$, а также компоненты оптимального управления $\overline{u}_i(t)$ будем искать, соответственно, в виде

$$u_1^N(t,s)=\sum_{i=1}^{N}\overline{u}_i(t)\varphi_i(s), \quad u_2^N(t,s)=\sum_{i=1}^{N}\overline{u}_i(t)\psi_i(s), \quad \overline{u}_i(t)=\sum_{k=0}^{M}c_k^i t^k, \ \ i=1,\ldots,N.$$

Все вычисления проводились в вычислительной среде Maple 15.0. Для определенности возьмем, например, $N=3$, $M=3$, $d_1=0,1$, $d_2=0,2$, $\tau=1$, $x_0^1(s)=1$, $x_0^2(s)=\cos\frac{s}{2}$, $x_\tau^1(s)=-\cos s$, $x_\tau^2(s)=\cos s$. Для того, чтобы были выполнены условия теоремы 3, возьмем, например, $\lambda_{1,2}=1$, $\alpha_1=-0,5$, $\alpha_2=-0,6$. Тогда условия (7) примут вид $a_1(0)=5,142, a_2(0)=-0,667, a_3(1)=0$. Затем, умножив скалярно (1) на собственные функции (8), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} -0,067a_3(t)-3,142c_2^1t-3,142c_3^2t^3+1,728a_2(t)-3,142c_0^2-3,142c_2^2t^2=0, \\ -0,200a_3(t)-6,283c_2^1t^2-6,283c_3^1t^3+6,283\dot{a}_1(t)+3,456a_1(t)-6,283c_0^1-6,283c_1^1t=0, \\ -0,200a_1(t)-0,067a_2(t)-3,142c_1^3t-3,142c_2^3t^2-3,142c_3^3t^3-3,142c_0^3+ \\ \qquad +2,356\dot{a}_3(t)+1,728a_3(t)=0. \end{cases}$$

Построим функционал стоимости (6) и зададим, например, $\mu=\nu=\frac{1}{2}$, $C=\mathbb{I}$, $\nu_{jkq}=1$, а плановые наблюдения $z_{d1}(t,s)=1$, $z_{d2}(t,s)=\cos s$. При указанных значениях параметров получены функции оптимального управления

$$\begin{aligned} &u_1(t,s)=-0,029+0,047t+0,191t^2-0,134t^3+(-0,120+0,004t-0,027t^2+0,013t^3)\cos s+ \\ &+(-0,221+0,055t-0,517t^2+0,328t^3)\cos\frac{s}{2}, \\ &u_2(t,s)=-0,029+0,047t+0,191t^2-0,134t^3+(0,120-0,004t+0,027t^2--0,013t^3)\cos s+ \\ &+(0,221-0,055t+0,517t^2-0,328t^3)\sin\frac{s}{2}, \end{aligned}$$

решение системы

$$\begin{aligned} &a_1(t)=6,975-4,209t+1,311t^2-0,210t^3+0,776e^{-0,536t+0,746}-0,117e^{-0,746t+0,209}- \\ &-1,688e^{-0,536t}-0,776e^{-0,746t+0,746}, \\ &a_2(t)=-0,636+0,324t-0,170t^2+0,045t^3+0,013e^{-0,536t+0,746}+ \\ &+0,028e^{-0,746t+0,209}-0,028e^{-0,536t}+0,184e^{-0,746t+0,746}, \\ &a_3(t)=-10,813+8,200t-3,141t^2+0,573t^3+0,332e^{-0,536t+0,746}+0,721e^{-0,746t+0,209}- \\ &-0,721e^{-0,536t}+4,772e^{-0,746t+0,746}, \end{aligned}$$

и минимальное значение функционала $J_{\min}=8,827$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{N}(\bar{u}_i(t))^2\leq 0,1$.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность своему научному руководителю доценту Н.А. Манаковой за конструктивные замечания и помощь в работе.

Литература

1. Загребина, С.А. Многоточечная начально-конечная задача для линейной модели Хоффа / С.А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 4–12.
2. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
3. Шестаков, А.Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
4. Манакова, Н.А. Об одной задаче оптимального управления с функционалом качества общего вида / Н.А. Манакова, А.Г. Дыльков // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – Вып. 4 (25). – С. 18–24.

Андрей Геннадьевич Дыльков, аспирант, кафедра математического анализа, Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), dylkov@yandex.ru.

MSC 35Q74, 35Q93

Numerical Solution of an Optimal Control Problem for One Linear Hoff Model Defined on Graph

A.G. Dylkov, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)

In this paper an optimal control over solutions of a one no classical mathematical physics problem for linear Hoff equations defined on a finite oriented connected graph has been investigated. This one we reduced to the initial-finish value problem for an abstract Sobolev type equation by special selected functional spaces. Existence and uniqueness for strong solution of the initial-finish value problem for a linear Sobolev type equation was established. It is shown that in this case exist a unique optimal control over solutions of considered problem. The obtained abstract results are applied to the one linear Hoff model defined on graph and existence and uniqueness for solution of this problem was established. This work contains a numerical experiment based on obtained theoretical results. For constructing of the approximate solution we used Galerkin's method. Also in this paper we used ideas and methods developed by G.A. Sviridyuk and his pupils.

Keywords: sobolev type equations, the initial-finish value problem, optimal control, the linear Hoff equation.

References

1. Zagrebina S.A. The Multipoint Initial-finish Problem for Hoff Linear Model. *Bulletin of South Ural State University. Seria «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2012, no. 5 (264), issue 11, pp. 4–12. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.
3. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of South Ural State University. Seria «Mathematical Modelling, Programming & Computer Software»*, 2011, no. 17(234), issue 8, pp. 70–75.
4. Manakova N.A., Dylkov A.G., On one optimal control problem with a penalty functional in general form. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki,* 2011, issue 4(25), pp. 18–24. (in Russian)

Поступила в редакцию 20 июня 2012 г.