УДК 62-50

ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА АДАПТАЦИИ В СИСТЕМЕ С МОДЕЛЬЮ

В.И. Долбенков

При разработке адаптивных систем, как непрерывных, так и дискретных, на начальном этапе проектирования рассматривают, как правило, непрерывные модели [1]. Такие модели более просты для исследования и в тоже время сохраняют черты общие и для дискретных моделей. Достаточно сложные алгоритмы адаптивного управления реализуются на основе цифровых вычислительных устройств, при использовании которых возникают специфические задачи синтеза [2]. В настоящей работе рассматривается аналоговый вариант адаптивной системы с моделью.

1. Постановка задачи

Объект управления определяется следующим уравнением состояния:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \qquad (1)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – n-мерный вектор состояния, $\mathbf{A}(t)$ – квадратная $n \times n$ матрица, $u(t)$ – скалярное управление, $\mathbf{B}$ – вектор, где $b_n = 1,\ b_j = 0,\ j = \overline{1, n-1}$.

Матрица $\mathbf{A}(t)$ представима в виде суммы

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}(t), \qquad (2)$$

где $\mathbf{A}_0$ – постоянная матрица, а вариации $\Delta\mathbf{A}(t)$ изменяются по неизвестному закону.

Матрицу $\mathbf{A}(t)$ удобнее всего взять в управляемом каноническом представлении

$$\mathbf{A}(t) = \left| \begin{array}{c:c} \mathbf{0}_{n-1,1} & \mathbf{E}_{n-1,n-1} \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{\mathbf{a}_n} \end{array} \right|, \qquad (3)$$

в котором $a_{ni} = a_{ni}^0 + \Delta a_{ni},\ i = \overline{1, n}$.

Уравнение модели

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}u(t) = (\mathbf{A}_0 + \mathbf{K}_0)\mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}u(t), \qquad (4)$$

где $\mathbf{K}_0$ – квадратная $n \times n$ матрица с ненулевой последней строкой. Уравнение состояния системы имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) =$$
$$= (\mathbf{A}_0 + \Delta\mathbf{A}(t))\mathbf{x}(t) + (\mathbf{K}_0 + \Delta\mathbf{K}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t). \qquad (5)$$

Здесь матрицы $\mathbf{K}_0$ и $\Delta\mathbf{K}(t)$ имеют ранее рассмотренную структуру. Введем в рассмотрение вектор параметрических рассогласований

$$\Delta\mathbf{s}(t) =$$
$$= \left| \Delta a_{n1} + \Delta k_{n1} \quad \Delta a_{n2} + \Delta k_{n2} \ \ldots \ \Delta a_{nn} + \Delta k_{nn} \right| \qquad (6)$$

и на его основе сконструируем матрицу параметрических рассогласований

$$\Delta\mathbf{S}(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ \Delta\mathbf{s}(t) \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

у которой лишь одна ненулевая последняя строка.

Уравнение для координатной ошибки адаптации $\mathbf{e}(t)$

$$\dot{\mathbf{e}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m(t)) = \mathbf{A}_m\mathbf{e}(t) + \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t). \qquad (8)$$

Требуется определить алгоритм адаптации в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестной правой частью

$$\frac{d\Delta\mathbf{k}_{ni}}{dt} = ?,\ i = \overline{1, n}. \qquad (9)$$

2. Решение задачи синтеза алгоритма, обеспечивающего устойчивость процесса адаптации

Задача решается на основе применения функции Ляпунова V. Для этого V представим в виде суммы двух квадратичных форм

$$V(\mathbf{e}, \Delta\mathbf{s}) = 0{,}5\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}\mathbf{e}(t)\rangle +$$
$$+0{,}5\langle \Delta\mathbf{s}(t), \mathbf{R}\Delta\mathbf{s}(t)\rangle, \qquad (10)$$

в которой $\mathbf{Q}$ – симметричная положительно определенная матрица, матрица $\mathbf{R}$ – диагональная с положительными коэффициентами.

Полная производная функции V по времени

$$\dot{V} = \langle \mathbf{Q}\mathbf{e}(t), \mathbf{A}_m\mathbf{e}(t)\rangle + \langle \mathbf{Q}\mathbf{e}(t), \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle +$$
$$+\left\langle \mathbf{R}\Delta\mathbf{s}(t), \frac{d\Delta\mathbf{s}(t)}{dt} \right\rangle. \qquad (11)$$

Полагая малой скорость изменения параметров объекта управления, последнее выражение можно представить в виде

$$\dot{V} = \langle \mathbf{Q}\mathbf{e}(t), \mathbf{A}_m\mathbf{e}(t)\rangle + \langle \mathbf{Q}\mathbf{e}(t), \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle +$$
$$+\left\langle \mathbf{R}\Delta\mathbf{s}(t), \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{k}(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle. \qquad (12)$$

Первая квадратичная форма в последнем выражении будет отрицательно определенной, если матрица $\mathbf{Q}$ определяется из решения матричного уравнения Ляпунова

$$\mathbf{A}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}_m = -\mathbf{W}, \qquad (13)$$

в котором $\mathbf{W}$ – положительно определенная матрица. Для обеспечения устойчивости процесса адаптации, определяемого из условия $\dot{V} \le 0$.

Дополнительно достаточно потребовать выполнения условия

$$\langle \mathbf{Q}\mathbf{e}(t), \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle + \left\langle \mathbf{R}\Delta\mathbf{s}(t), \frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{k}(t)}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 0. \qquad (14)$$

После преобразований последнего уравнения при диагональной матрице $\mathbf{R}$ определяется алгоритм адаптации

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\mathbf{k}_{ni}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{r_i}(\mathbf{Q}\mathbf{e})_n x_i,\ i = \overline{1, n}. \qquad (15)$$

Характерной особенностью синтезированного алгоритма является необходимость использования всех элементов вектора $\mathbf{e}(t)$ и соответственно измерения всех параметров состояния объекта управления.

3. Решение задачи синтеза оптимального алгоритма адаптации

Минимизируемый функционал задается в виде

$$I = 0,5\int_{t_0}^{t_1}\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t)\rangle dt, \qquad (16)$$

в котором $\mathbf{e}(t)$ – координатная ошибка адаптации, $\mathbf{Q}(t)$ – положительно полуопределенная матрица, t_0, t_1 – начальный и конечный моменты времени.

Дифференциальные уравнения системы представим в виде

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_m\mathbf{e}(t) + \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t);$$

$$\frac{d\Delta\mathbf{k}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t), \qquad (17)$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t)$ – неизвестная вектор-функция.

Для решения задачи используется уравнение Беллмана, в котором минимальная величина функционала может быть записана в виде

$$I_{\min} = 0,5\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t)\rangle +$$
$$+0,5\langle \Delta\mathbf{k}(t), \mathbf{N}(t)\Delta\mathbf{k}(t)\rangle, \qquad (18)$$

где $\mathbf{P}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ – неизвестные симметричные положительно определенные матрицы.

Уравнение Беллмана рассматриваемой задачи определяется следующим образом

$$-\frac{\partial I_{\min}}{\partial t} = \min_u\Big\{0,5\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t)\rangle +$$
$$+\left\langle \begin{vmatrix} \dfrac{\partial I_{\min}}{\partial \mathbf{e}} \\ \dfrac{\partial I_{\min}}{\partial \Delta\mathbf{k}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \mathbf{A}_m\mathbf{e}(t) + \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t) \end{vmatrix} \right\rangle\Big\}. \qquad (19)$$

Поскольку ограничений на величину $\Delta\mathbf{k}(t)$ не задано, то минимальная величина функции в фигурных скобках может быть найдена и необходимых условий

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{k}}\{\ldots\} = 0. \qquad (20)$$

С учетом особенностей $\Delta\mathbf{S}$ последняя производная определяется следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{k}}\{\ldots\} = \frac{\partial}{\partial \Delta\mathbf{k}}\{\langle \mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t), \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle +$$
$$+\langle \mathbf{N}(t)\Delta\mathbf{k}(t), \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t)\rangle\} =$$
$$= \mathbf{N}(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t) + (\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t))_n\mathbf{x}(t) = 0. \qquad (21)$$

Из последнего уравнения получаем алгоритм адаптации в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{e}(t), t) = -\mathbf{N}^{-1}(t)(\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t))_n\mathbf{x}(t). \qquad (22)$$

Определим частную производную в левой части уравнения Беллмана

$$-\frac{\partial I_{\min}}{\partial t} = -0,5\langle \mathbf{e}(t), \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{e}(t)\rangle -$$
$$-0,5\langle \Delta\mathbf{k}(t), \dot{\mathbf{N}}(t)\Delta\mathbf{k}(t)\rangle \qquad (23)$$

и приравняем ее к правой части, подставив туда выражение для алгоритма адаптации. Тогда получим, что

$$0,5\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t)\rangle + \langle \mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t), \mathbf{A}_m e(t) + \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle +$$
$$+\langle \mathbf{N}(t)\Delta\mathbf{k}(t), -\mathbf{N}^{-1}(t)(\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t))_n\mathbf{x}(t)\rangle =$$
$$= -0,5\langle \mathbf{e}(t), \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{e}(t)\rangle - 0,5\langle \Delta\mathbf{k}(t), \dot{\mathbf{N}}(\mathrm{t})\Delta\mathbf{k}(t)\rangle. \qquad (24)$$

После отделения в последней формуле переменных относящихся к квадратичным формам, содержащим $\mathbf{e}(t)$, получим дифференциальное уравнение для матрицы $\mathbf{P}(t)$

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}_m^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}_m - \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{P}(t_1) = 0. \qquad (25)$$

Оставшаяся часть в правой части равна нулю, т.е.

$$\langle \mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t), \Delta\mathbf{S}\mathbf{x}(t)\rangle - \langle \Delta\mathbf{k}(t), (\mathbf{P}(t)\mathbf{e}(t))_n\mathbf{x}(t)\rangle -$$
$$-0,5\langle \Delta\mathbf{k}(t), \dot{\mathbf{N}}(t)\Delta\mathbf{k}(t)\rangle = 0. \qquad (26)$$

После преобразования первых двух слагаемых в последней формуле получаем, что они взаимно компенсируют друг друга. На основании этого можно сделать вывод, что

$$\dot{\mathbf{N}}(t) = 0$$

или

$$\mathbf{N}(t)\text{=const}. \qquad (27)$$

Таким образом, решение задачи оптимизации процесса адаптации сводится к необходимости использования уравнения (22), в котором матрица $\mathbf{N}(t)$, может быть взята в виде симметричной положительно определенной матрицы с произвольными коэффициентами, а матрица $\mathbf{P}(t)$ должна быть получена из уравнения (25), которое вначале надо интегрировать в обратном времени с начальным условием $\mathbf{P}(t_1) = 0$, а затем в прямом времени.

4. Регуляризация алгоритма адаптации

Как показывает практика расчетов, при определенных классах входных сигналов может возникнуть неоднозначность в определении матриц обратных связей оптимального регулятора. Эту неоднозначность можно интерпретировать как следствие некоторой избыточности количества параметров адаптации для данного спектра входных сигналов. Бесконтрольность компонент матриц обратных связей приводит к недопустимому их возрастанию.

Указанные свойства процесса адаптации делает его особенно чувствительным к неточности реализации операций сложения и умножения в ЦВМ, к шумам измерения входных сигналов и параметров состояния объекта управления.

С целью регуляризации алгоритма адаптации в минимизируемый интегральный функционал вводится аддитивная регуляризирующая добавка

$$I_1 = 0,5\int_{t_0}^{t_1}\langle \mathbf{e}(t), \mathbf{Q}(t)\mathbf{e}(t)\rangle\, dt +$$

$$+0,5\alpha\int_{t_0}^{t_1}\langle \Delta\mathbf{k}(t), \mathbf{F}(t)\Delta\mathbf{k}(t)\rangle\, dt. \quad (28)$$

В приведенном интеграле F(t) - положительно определенная матрица, коэффициент а - скалярный коэффициент, наличие которого достаточно мало для того, чтобы основная часть функционала преобладала. Выбор добавки в виде квадратичной формы обусловлен лишь соображениями реализуемости получаемых алгоритмов.

Используя уравнение Беллмана и процедуру, аналогичную рассмотренной ранее, можно получить функцию f в виде [3]:

$$\mathbf{f} = -\alpha\Delta\mathbf{k}(t) - e_1(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{L}\left\{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_m(t)\right\}\mathbf{F}^{-1}(t)\mathbf{B}_m, \quad (29)$$

где $e_1(t)$ – первая компонента координатной ошибки адаптации, $\mathbf{L}$ – оператор динамического преобразования параметров состояния модели, B, B_m, C - матрицы модели и выхода объекта управления.

В терминах исходной постановки задачи алгоритмы, получаемые с учетом регуляризации получаются, строго говоря, квазиоптимальными. Обоснованный выбор параметра а, по-видимому, требует использования информации об ошибках реализации алгоритмов, о шумах и других возмущениях, т.е. возможен лишь для конкретной задачи.

Литература

1. Петров Б.Н. и др. Принципы построения и проектирования самонастраивающихся систем управления. -М.: Магиностроение, 1972. - 260 с.

2.Деревицкий Д.П., Фрадков А.Л. Прикладная теория дискретных адаптивных систем. - М.: Наука, 1989.-216 с.

3.Долбенков В.И., Штакан В.Ф. Синтез квазиоптимального грубого алгоритма адаптации по модели// Управляющие и информационные системы и элементы: Темат. сборн. научи, тр. - Челябинск: ЧПИ, 1982. - С. 40-50.