УДК 517.977

СРАВНЕНИЕ ОЦЕНОК МИНИМАКСНОГО ФИЛЬТРА И ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Е.О. Подивилова, В.И. Ширяев

В статье рассмотрено применение фильтра Калмана и минимаксного фильтра для решения задачи оценивания вектора состояния динамических систем в условиях неопределенности. Фильтр Калмана применяется, когда предполагается, что возмущения и помехи, действующие на систему, являются случайными величинами с известными функциями распределения, а минимаксный фильтр – когда статистическая информация о возмущениях и помехах отсутствует, и известны только множества их возможных значений. Проведен сравнительный анализ множественных и точечных оценок, полученных в результате применения этих алгоритмов при моделировании процесса с различными возмущениями и помехами. В статье также рассматривается вопрос о возможности уточнения информационных множеств, построенных на основе минимаксного фильтра, с помощью доверительных эллипсов, полученных в результате применения фильтра Калмана. Приведен модельный пример, который демонстрирует эффективность совместного использования фильтров.

Ключевые слова: гарантированные оценки, фильтр Калмана, минимаксный фильтр.

Введение

Важной задачей в теории управления является построение эффективных алгоритмов оценивания состояния динамической системы [1 – 6]. Один из подходов к оцениванию вектора состояния в условиях неопределенности – вероятностный, согласно которому возмущения и помехи являются случайными величинами с известными функциями распределения [1, 7, 8]. Но в реальных условиях, как правило, отсутствует статистическая информация о возмущениях и помехах, а известны множества их возможных значений [2 – 6]. Сравним эти подходы при различных реализациях процесса. Работа продолжает исследования [7, 8]. Пусть процессы в системе управления описываются линейными разностными уравнениями вида:

$$x_{k+1} = Ax_k + \Gamma w_k,\ y_{k+1} = Gx_k + Hv_k,\ k = 0, 1, ..., N-1, \qquad (1)$$

где $x_k \in R^n$, w_k, $y_k \in R^m$, v_k – векторы состояния системы, возмущения, измерения, ошибок измерений на k-м шаге соответственно; A, Γ, G, H – известные матрицы.

1. Минимаксный фильтр

Известно, что x_0, w_k и v_k на k-м шаге могут принимать любые значения из некоторых заданных выпуклых множеств: $x_0 \in X_0,\ w_k \in W,\ v_k \in V,\ k = 0, 1, ..., N-1$. Гарантированное оценивание состояния системы состоит в построении последовательности информационных множеств $\overline{X}_{k+1}, k = 0, 1, ..., N-1$[2]:

$$X_{k+1/k} = A\overline{X}_k + \Gamma W, \qquad (2)$$

$$X[y_{k+1}] = \{x \in R^n | Gx + v = y_{k+1},\ v \in V\}, \qquad (3)$$

$$\overline{X}_{k+1} = X_{k+1/k} \cap X[y_{k+1}],\ k = 0, 1, ..., N-1. \qquad (4)$$

При построении минимаксного фильтра в качестве оценки ${x_k}^*$ вектора состояния x_k системы (1) рассматривается чебышевский центр информационного множества $\overline{X}_k$[2].

Пример 1. В системе (1) матрицы G и H – единичные, $A = \begin{pmatrix} 0,9976 & 0,04639 \\ -0,09278 & 0.8584 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{pmatrix} 0,1189 \cdot 10^{-3} \\ 4,639 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$, $X_0 = \{x \in R^2 | -7,5 \cdot 10^{-4} \leq x(1) \leq 7,5 \cdot 10^{-4} \;\; -0,03 \leq x(2) \leq 0,03\}$ $W = \{w \in R | -1,5 \leq w \leq 1,5\}$, $V = \{x \in R^2 | -1,45 \cdot 10^{-4} \leq x(1) \leq 1,45 \cdot 10^{-4} \;\; -0,0228 \leq x(2) \leq 0,0228\}$. Для моделирования процесса будем считать, что $x_0 = 0$, а w_k и v_k периодически меняются по вершинам множеств W и V соответственно в различном порядке (реализация 1 и реализация 2). Поскольку v_k и w_k меняются периодически, то и при построении информационных множеств можно наблюдать периодичность в форме и размерах информационных множеств (рис. 1, 2), которые в зависимости от реализованных возмущений и помех представляют собой выпуклые многоугольники (рис. 1), отрезки или точки(рис. 2). Во втором случае даже при наличии возмущений и помех измерений на некоторых итерациях можно точно оценить состояние системы.

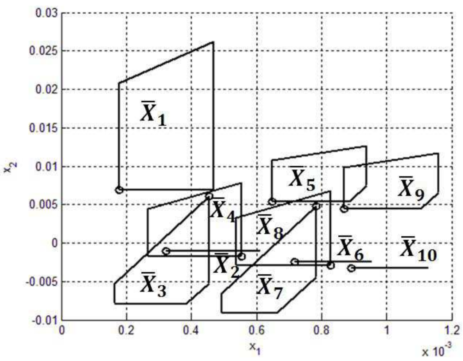


Рис. 1. Эволюция информационных множеств (реализация 1)

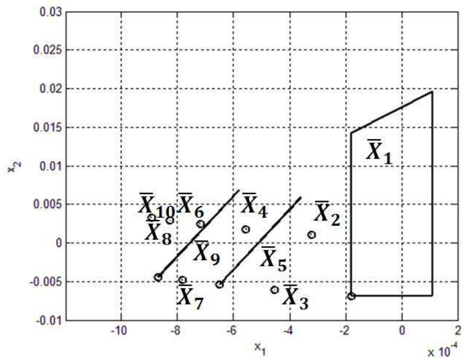


Рис. 2. Эволюция информационных множеств (реализация 2)

2. Фильтр Калмана

В этом случае известно, что $w_k \sim N(0, Q)$, $v_k \sim N(0, R)$, $x_0 \sim N(0, P_0)$. Уравнение фильтра Калмана имеет вид:

$$\widehat{x}_{k+1} = A\widehat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - G\widehat{x}_k) \,, \tag{5}$$

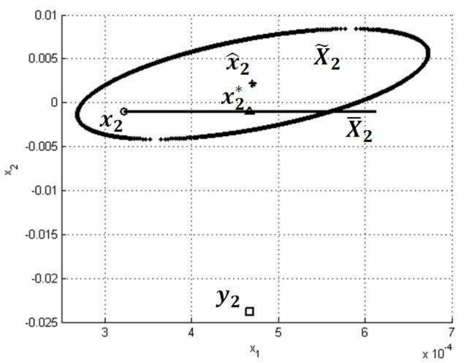
$$K_k = (AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma')((AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma') + HR_kH')^{-1} \,, \tag{6}$$

$$P_k = (I - K_k)(AP_{k-1}A' + \Gamma Q_{k-1}\Gamma') \,, k = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

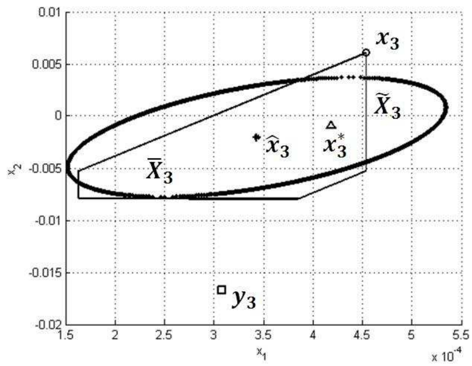
Матрицы ковариаций зададим таким образом, чтобы случайные величины x_0, w, v на уровне 3σ попадали во множества X_0, W, V, т.е. аппроксимируем множества X_0, W, V описанными эллипсами: $P_0 = 10^{-4} diag(0,0016; 1,1044), Q = 0,25, R = 10^{-4} diag(0,0005; 1,1378)$. При этом стоит отметить, что хотя и предполагается, что случайные величины имеют известные характеристики распределения, в данном примере рассматривается единственная реализация процесса. Действительное значение вектора состояния системы на уровне 3σ попадает во множество $(x_k - \widehat{x}_k)' P_k^{-1} (x_k - \widehat{x}_k) = l^2$. Вероятность нахождения вектора x_k внутри полученного эллипса при $l = 3$ равна $0,989$.

3. Сравнение доверительных областей и информационных множеств

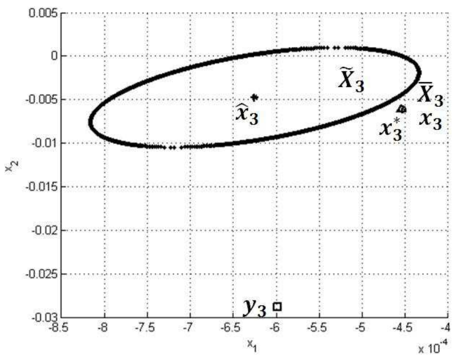
В рассмотренных случаях истинные значения вектора состояния на некоторых итерациях находятся за пределами доверительных эллипсов (рис. 3). Это можно объяснить тем, что возмущения и помехи выбирались на границах своих доверительных областей, где значения вероятностей этих величин мало. При использовании минимаксного фильтра гарантируется, что значение вектора состояния находится внутри информационного множества. Отметим, что даже если на каком-то шаге оценка вектора состояния совпадет с истинным значением (см. рис. 2, $k = 2, 3, 4, 7$), то фильтр Калмана в отличие от минимаксного фильтра не сможет распознать эту ситуацию. При сравнении мгновенных оценок фильтров получается, что в реализации 1 мгновенная оценка фильтра Калмана в среднем ближе к истинному значению: $\sigma_k = 0,00436$, $\sigma_{MM} = 0,00514$, а при реализации 2 – наоборот: $\sigma_k = 0,00531$, $\sigma_{MM} = 0,00491$.



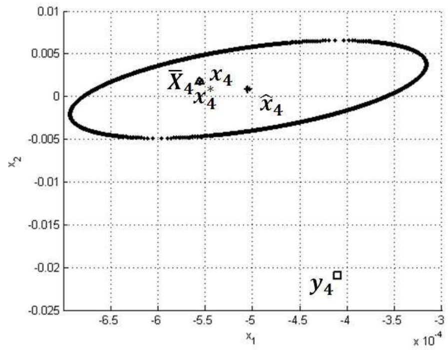
а) Реализация 1



б) Реализация 1



в) Реализация 2



г)Реализация 2

Рис. 3. Сравнение доверительных областей и информационных множеств

4. Совместное использование фильтров

Рассмотрим реализацию процесса, согласно которой в рассмотренной выше системе (1) матрица A взята единичной, $w_k = 0, k = 0, 1, ..., N$, а помехи измерения реализуются случайно из заданного множества V. На каждом шаге в качестве множественной оценки будем брать пересечение информационного множества и прямоугольника, аппроксимирующего доверительный эллипс сверху. В данном случае совместное использование фильтров позволяет существенно уменьшить размеры информационных множеств (рис. 4). Стоит отметить, что одновременное применение двух фильтров может привести к расхождению, например, в реализации 1 и 2, когда истинное значение вектора состояния не попадает в доверительный эллипс. В некоторых случаях совместное использование фильтра Калмана и минимаксного фильтра может быть весьма эффективным. Распознать такую ситуацию можно на этапе проектирования системы.

а) б)

Рис. 4. Информационные множества

Литература

1. Калман, Р.Е. Идентификация систем с шумами / Р.Е. Калман // Успехи мат. наук. – 1985. – Т. 40, вып. 4(244). – 1985. – С. 27–41.
2. Кац, И.Я. Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределчнных ситуациях / И.Я. Кац, А.Б. Куржанский // Автоматика и телематика. – 1978. – №11. – С. 79–87.
3. Кунцевич, В.М. Управление в условиях неопределенности: гарантированные результаты в задачах управления и идентификации / В.М. Кунцевич. – Киев: Наукова думка, 2006. – 264 с.
4. Овсеевич, А.И. К вопросу о сопоставлении вероятностного и гарантированного подходов к прогнозу фазового состояния динамических систем / А.И. Овсеевич, А.М. Шматков // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1997. – №4. – С. 11–16.
5. Филимонов, Н.Б. Идентификация состояния и внешней среды дискретных динамических объектов методом полиэдрального программирования / Н.Б. Филимонов // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2003. – №2. – С. 11–15.
6. Черноусько, Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов / Ф.Л. Черноусько. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
7. Ширяев, В.И. Алгоритмы управления динамическими системами в условиях неопределчнности / В.И. Ширяев // Мехатроника. – 2001. – №8. – С. 2–5.
8. Оценивание состояния динамической системы в условиях неопределенности / В.И. Ширяев, В.И. Долбенков, Е.Д. Ильин, Е.О. Подивилова // Экстремальная робототехника: сб. докл. Междунар. науч.-техн. конф. – СПб, 2011. – С. 234–243.

Елена Олеговна Подивилова, аспирант, кафедра «Системы управления», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), podivilova_elena@mail.ru

Владимир Иванович Ширяев, доктор технических наук, профессор, кафедра «Системы управления», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), vis@prima.susu.ac.ru

MSC 93E10

Comparison of Minimax Filter and Kalman Filter Estimations

E.O. Podivilovai, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)***,***
V.I. Shiryaev, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

The article describes using Kalman filter and minimax filter for estimation of dynamic system state vector under condition of uncertainty. Kalman filter is used when disturbances and noises affecting the system are considered to be stochastic variables with a certain distribution curves. Minimax filter is used when statistic information about disturbances and noises is absent but sets of their possible values are available. The comparison of set and point estimations received by using this filters for process with different disturbances and noises is performed. The article also describes the idea of improvement of information sets received by minimax filter by confidence ellipsoid received by Kalman filter. The example of effective joint using of minimax filter and Kalman filter is given in the article.

Keywords: guaranteed estimation, Kalman filter, minimax filter.

References

1. Kalman R.E. Identification of Noisy Systems. *Russian Mathematical Surveys,* 1985, no. 40 (4), pp. 25–42.

2. Kats I.YA., Kurzhansky A.B. Minimax Multistep Filtration in Statistically Undefined Situations. *Avtomatica i telemekhanica*, 1978, no. 11, pp. 79–87. (in Russian)

3. Kuntsenich V.M. Control under Condition of Uncertainty: Guaranteed Reluts in Control and Identification Problems. *Naukova Dumka*, 2006, 264 p. (in Russian)

4. Ovseevich A.I., Shmatkov A.M. On the Question of Comparison of Stochastic and Guaranteed Approach of Dynamic System State Forecast. *Izv. AN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 1997, no. 4, pp. 11–16. (in Russian)

5. Philimonov N.B. Identification of Discrete Dynamic Objects State and Environment by Polyhedral Programming Method. *Mekhatronika, avtomatizatsiya, upravleniye*, 2003, no. 2. pp. 11–15. (in Russian)

6. Chernousko F.L. *State Estimation for Dynamic Systems.* Boca Raton, CRC Press, 1994. 304 p.

7. Shiryaev V.I. Algorithm of Dynamic System Control Under Condition Of Uncertainty. *Mekhatronika*, 2001, no. 8, pp. 2–5. (in Russian)

8. Shiryaev V.I, Dolbenkov V.I, Ilin E.D., Podivilova E.O. Dynamic System State Estimation under Condition of Uncertainty. *Ekstremalnaya robototekhnika. Sbornik dokladov Mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferenitsii* [Extreeme Robotics. Proceedings of the International Scientific and Technological Conference]. Saint-Petersburg: «Politechikaservice», 2011, pp. 234–243.

Поступила в редакцию 22 августа 2012 г.