УДК 519.642.8

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕННЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗОВАННЫХ СЛЕДОВ

С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин

Статья является продолжением работ, связанных с разработкой неитерационного численного метода, позволяющего находить значения первых собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узлах дискретизации. Трудность использования метода РС без непосредственного решения систем нелинейных уравнений связана с выражением значений собственных функций возмущенных дискретных операторов из произведения собственной функции возмущенного оператора на ее сопряженную. В работе предложен вычислительно эффективный алгоритм, позволяющий обойти эту сложность. Разработанная методика была проверена на примере спектральной задачи нахождения значений собственных функций возмущенного оператора Лапласа. Из результатов вычисления видно, что найденные значения собственных функций хорошо согласуются с результатами, полученными известными методами А.Н. Крылова и А.М. Данилевского.

Ключевые слова: собственные числа, собственные функции, «взвешенные» поправки теории возмущений, самосопряженные операторы.

Введение

Многие задачи прикладной математики приводят к проблеме нахождения собственных функций возмущенных самосопряженных операторов [1 – 3].

Теоретические основы нахождения значений первых собственных функций возмущенных самосопряженных операторов методом РС изложены в работе [4]. Следуя ей, рассмотрим дискретный полуограниченный снизу оператор T и ограниченный оператор P, заданные в сепарабельном гильбертовом пространстве H с областью определения $D \subset H$. Пусть $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора T, занумерованные в порядке возрастания их величин с учетом кратности, а $\{v_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ – его ортонормированные собственные функции, соответствующие этим собственным числам. Обозначим через ν_n кратность собственного значения λ_n оператора T, а количество всех неравных друг другу собственных значений λ_n оператора T, которые лежат внутри окружности T_{n_0} радиуса $\rho_{n_0} = \dfrac{|\lambda_{n_0+1} + \lambda_{n_0}|}{2}$ с центром в начале координат комплексной плоскости, через n_0. Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$ – собственные числа оператора $T + P$, занумерованные в порядке возрастания их действительных частей с учетом алгебраической кратности. Если для всех $n \geq n_0$ выполняются неравенства $q_n = \dfrac{2\|P\|}{|\lambda_{n+\nu_n} - \lambda_n|} < 1$, тогда значения первых $m_0 = \sum\limits_{n=1}^{n_0} \nu_n$ собственных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T + P$ находятся из уравнений вида

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \frac{1}{\mu_n}\Big(\lambda_n v_n(x)\overline{v}_n(y) + \sum_{k=1}^{\infty}[\alpha_k^{(1)}(n, x, y) - \alpha_k^{(1)}(n-1, x, y)]\Big), \quad x, y \in D \qquad (1).$$

Здесь $\alpha_k^{(1)}(n_0, x, y) = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{T_{n_0}} \lambda[K_T(x, z_k, \lambda) \circ P_{z_k}]^k \circ K_T(z_k, y, \lambda) d\lambda$ – k – ые поправки теории возмущений к «взвешенной» спектральной функции оператора $T + P$ первого порядка;

$(K\circ P\circ Q)(x,y,\lambda) = \int\limits_D K(x,z,\lambda)P_z Q(z,y,\lambda)dz$; $K_T(x,y,\lambda)$ – ядро резольвенты $R_\lambda(T)$ оператора T.

В случае, когда в уравнениях (1) значения аргументов x и y совпадают, то из (1) можно найти только $u^2(x)$. Поэтому, надо построить алгоритм, позволяюший обойти эту сложность.

1. Алгоритм нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов

Обозначим правую часть (1) через $\varphi_n(x,y)$:

$$u_n(x)\overline{u}_n(y) = \varphi_n(x,y). \tag{2}$$

Для того, чтобы найти значения $u_n(x)$ используя (2), воспользуемся следующей схемой. Проиллюстрируем ее, для простоты, в случае, когда собственные функции $\{u_n(x)\}_{n=1}^{m_0}$ оператора $T+P$ являются функциями двух переменных. Разобьем область определения оператора $T+P$ на m^2 узлов с координатами (x_i,y_j), $i,j=\overline{1,m}$. Тогда

$$u_n(x_{i_1},y_{j_1})\overline{u}_n(x_{i_2},y_{j_2}) = \varphi_n(x_{i_1},y_{j_1},x_{i_2},y_{j_2}),\ i_1,j_1,i_2,j_2=\overline{1,m}. \tag{3}$$

Из (3) в узловых точках (x_i,y_j) и (x_{i+1},y_j) имеем:

$$u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_{i+1},y_j) = \varphi_n(x_i,y_j,x_{i+1},y_j). \tag{4}$$

Отсюда

$$\overline{u}_n(x_{i+1},y_j) = \pm\frac{\varphi_n(x_i,y_j,x_{i+1},y_j)}{\sqrt{\varphi_n(x_i,y_j,x_i,y_j)}},\quad i=\overline{1,m-1},\quad j=\overline{1,m}.$$

Необходимо определить знак значений собственных функции. Для этого будем следить за произведениями вида $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_{i+1},y_j)$ и $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_i,y_{j+1})$. Первое является значением произведения n-й собственной функции в соседних узлах относительно оси Ox. Второе – относительно оси Oy. Очевидно, что если действительная часть произведения $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_{i+1},y_j)$ будет отрицательной, то в точках (x_i,y_j) и (x_{i+1},y_j) значения функции u_n будут принимать разные знаки. Таким образом, просматривая значения произведений в каждом узле можно отследить изменение знака значений собственных функций.

Вначале, для определенности, все значения $u_n(x_i,y_j)$, $i,j=\overline{1,m}$ считаем положительными. Введем вспомогательный коэффициент ξ, равный 1 или -1, в зависимости от знака действительных частей произведений $u_n(x_{i_1},y_{j_1})\overline{u}_n(x_{i_2},y_{j_2})$. Умножим $u_n(x_i,y_j)$ на ξ, проходя через каждый узел дискретизации. Вначале каждого просмотра узлов относительно оси Ox, т.е. при каждом $i=1$, значение ξ считаем равным -1. Просмотрим знак действительной части произведения $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_{i+1},y_j)$ двигаясь в направлении оси Ox. Если значение действительной части $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_{i+1},y_j)$ отрицательное, то знак коэффициента ξ меняется на противоположный.

Затем, подобные операции со значениями $u_n(x_i,y_j)$ проводим, двигаясь вдоль оси Oy, рассматривая произведения вида $u_n(x_i,y_j)\overline{u}_n(x_i,y_{j+1})$. Чтобы не менять уже измененные на предыдущем этапе значения $u_n(x_i,y_j)$, перед началом просмотра каждого узла вдоль оси Oy (при $j=1$) считаем $\xi=1$.

2. Возмущенный оператор Лапласа

Пусть оператор $T=-\Delta$ задан на прямоугольнике $\Pi=[0,a]\times[0,b]$ с границей Γ. Здесь $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа. В качестве возмущения P возьмем оператор умножения на функцию $p(x,y)$, определенную на прямоугольнике Π.

Рассмотрим спектральную задачу

$$(T+P)\varphi = \beta\varphi,\ \varphi \in D_T. \tag{5}$$

$$D_T = \Big\{\varphi \mid \varphi \in C^2(\Pi)\bigcap C[\Pi], \Delta\varphi \in L_2[\Pi] : \varphi\Big|_{\Gamma} = 0\Big\}.$$

Собственные числа λ_{nk} и собственные функции v_{nk} оператора T имеют вид:

$$\lambda_{nk} = \pi^2\Big(\frac{n^2}{a^2}+\frac{k^2}{b^2}\Big),\ v_{nk}(x,y) = \frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{k\pi y}{b},\quad n,k \in N.$$

Система собственных функций $\{v_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2[\Pi]$. В случае, если $\dfrac{a^2}{b^2}$ – иррациональное число, то оператор T имеет однократный спектр.

Пронумеруем собственные числа $\{\lambda_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty}$ оператора T одним индексом в порядке возрастания их действительных частей.

Собственные числа оператора $T+P$ будем искать по формулам, полученным в работе [5]; суммы функциональных рядов Рэлея–Шредингера – путем суммирования «взвешенных» поправок теории возмущений по формулам из работы [4]. Значения собственных функций $u_n(x)$ вычисляются по алгоритму описанному, в главе 1.

В таблице приведены результаты вычисления значений некоторых собственных функций спектральной задачи (5) методом РС $\widetilde{u}_n(x,y)$ и известными методами $\widehat{u}_n(x,y)$. Причем значения четвертой собственной функции $\widehat{u}_4(x,y)$ вычислены по методу А. Н. Крылова, а десятой $\widehat{u}_{10}(x,y)$ – по методу А. М. Данилевского. Аргументы x и y изменяются с шагом 0,11.

Проведенные расчеты показывают, что результаты вычислений, полученные методом РС и известными методами, хорошо согласуются.

Таблица

Значения $\widehat{u}_n(x,y)$ и $\widetilde{u}_n(x,y)$ для возмущенного оператора Лапласа, вычисленных при $a=\frac{\pi}{3}$, $b=1$ и $p(x,y)=(1+i)xy^2$

x	y	$\widehat{u}_4(x,y)$	$\widetilde{u}_4(x,y)$	$\lvert\widehat{u}_4-\widetilde{u}_4\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_4-\widetilde{u}_4}{\widetilde{u}_4}\right\rvert\%$
$0,22$	$0,22$	$-1,85462215+0,00517426i$	$-1,85524142+0,00451547i$	$0,00061755$	$0,033298$
$0,22$	$0,33$	$-1,65070236+0,00841857i$	$-1,65082052+0,00829097i$	$0,00011751$	$0,007119$
$0,22$	$0,44$	$-0,68643245+0,01052082i$	$-0,68587470+0,01118612i$	$0,00054716$	$0,079764$
$0,22$	$0,55$	$0,59548727+0,01039197i$	$0,59622038+0,01097173i$	$0,00074338$	$0,124817$
$0,22$	$0,66$	$1,60684349+0,00823595i$	$1,60699108+0,00836610i$	$0,00014825$	$0,009226$
$0,22$	$0,77$	$1,88364206+0,00522878i$	$1,88299142+0,00459912i$	$0,00065227$	$0,034640$
$0,33$	$0,22$	$-1,75547279+0,00585729i$	$-1,75554010+0,00577419i$	$0,00006704$	$0,003819$
$0,33$	$0,33$	$-1,56362087+0,00763645i$	$-1,56375393+0,00753074i$	$0,00013254$	$0,008476$
$0,33$	$0,44$	$-0,65262263+0,00739091i$	$-0,65260825+0,00746730i$	$0,00001352$	$0,002071$
$0,33$	$0,55$	$0,55925295+0,00509504i$	$0,55946875+0,00538079i$	$0,00021847$	$0,039063$
$0,33$	$0,66$	$1,51600109+0,00200445i$	$1,51614759+0,00220637i$	$0,00014678$	$0,009682$
$0,33$	$0,77$	$1,77872642-0,00024662i$	$1,77857301-0,00036345i$	$0,00015338$	$0,008624$
$0,44$	$0,22$	$-0,91742851+0,00565095i$	$-0,91683891+0,00625627i$	$0,00058565$	$0,063876$
$0,44$	$0,33$	$-0,81911810+0,00431652i$	$-0,81924803+0,00424329i$	$0,00012954$	$0,015814$

x	y	$\widehat{u}_4(x,y)$	$\widetilde{u}_4(x,y)$	$\lvert\widehat{u}_4-\widetilde{u}_4\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_4-\widetilde{u}_4}{\widetilde{u}_4}\right\rvert\%$
$0,44$	$0,44$	$-0,34548986+0,00035851i$	$-0,34611542-0,00025354i$	$0,00062546$	$0,181037$
$0,44$	$0,55$	$0,28630312-0,00416561i$	$0,28587444-0,00440787i$	$0,00042501$	$0,148651$
$0,44$	$0,66$	$0,78655670-0,00692116i$	$0,78667872-0,00675166i$	$0,00012054$	$0,015324$
$0,44$	$0,77$	$0,92554465-0,00678249i$	$0,92599695-0,00633879i$	$0,00044914$	$0,048525$
$0,55$	$0,22$	$0,30817228+0,00530433i$	$0,30893775+0,00612706i$	$0,00078057$	$0,253254$
$0,55$	$0,33$	$0,27090478+0,00066826i$	$0,27077738+0,00057665i$	$0,00012760$	$0,047125$
$0,55$	$0,44$	$0,10711175-0,00646187i$	$0,10631389-0,00716129i$	$0,00075168$	$0,705444$
$0,55$	$0,55$	$-0,10688190-0,01165372i$	$-0,10747606-0,01265553i$	$0,00070325$	$0,654097$
$0,55$	$0,66$	$-0,27252829-0,01220819i$	$-0,27241161-0,01232308i$	$0,00011139$	$0,040849$
$0,55$	$0,77$	$-0,31479529-0,00888249i$	$-0,31417934-0,00842491i$	$0,00062831$	$0,199912$
$0,66$	$0,22$	$1,40671889+0,00511914i$	$1,40703142+0,00566817i$	$0,00031463$	$0,022366$
$0,66$	$0,33$	$1,24882924-0,00157377i$	$1,24869574-0,00170729i$	$0,00013332$	$0,010676$
$0,66$	$0,44$	$0,51539526-0,00989967i$	$0,51486755-0,00921652i$	$0,00054029$	$0,104921$
$0,66$	$0,55$	$-0,45465229-0,01372646i$	$-0,45548726-0,01640268i$	$0,00092305$	$0,202931$
$0,66$	$0,66$	$-1,21571626-0,01094009i$	$-1,21570596-0,12127772i$	$0,00000097$	$0,000079$
$0,66$	$0,77$	$-1,42058518-0,00492765i$	$-1,42042301-0,00539509i$	$0,00016047$	$0,011297$
x	y	$\widehat{u}_{10}(x,y)$	$\widetilde{u}_{10}(x,y)$	$\lvert\widehat{u}_{10}-\widetilde{u}_{10}\rvert$	$\left\lvert\frac{\widehat{u}_{10}-\widetilde{u}_{10}}{\widetilde{u}_{10}}\right\rvert\%$
$0,22$	$0,22$	$0,44112479-0,00104674i$	$0,44116660+0,00005617i$	$0,004705$	$0,009195$
$0,22$	$0,33$	$-1,01168026-0,00135114i$	$-1,01170379+0,00003890i$	$0,002951$	$0,002236$
$0,22$	$0,44$	$-0,82017858-0,00149305i$	$-0,82027541-0,00000449i$	$0,000561$	$0,011639$
$0,22$	$0,55$	$0,70438500-0,00148938i$	$0,70429465-0,00004938i$	$0,003958$	$0,013052$
$0,22$	$0,66$	$1,08414601-0,00133969i$	$1,08416851-0,00006744i$	$0,005723$	$0,001999$
$0,22$	$0,77$	$-0,29822374-0,00103481i$	$-0,29807508-0,00005498i$	$0,005356$	$0,050475$
$0,33$	$0,22$	$0,60087708+0,00646559i$	$0,60162097+0,00013244i$	$0,004116$	$0,118007$
$0,33$	$0,33$	$-1,37948490+0,00965086i$	$-1,37947705+0,00010186i$	$0,004028$	$0,003016$
$0,33$	$0,44$	$-1,11768027+0,01166907i$	$-1,11849100+0,00000684i$	$0,000749$	$0,067084$
$0,33$	$0,55$	$0,96125693+0,01166638i$	$0,96031290-0,00010693i$	$0,001015$	$0,105675$
$0,33$	$0,66$	$1,47853265+0,00965187i$	$1,47825918-0,00017002i$	$0,000305$	$0,206301$
$0,33$	$0,77$	$-0,40706531+0,64980922i$	$-0,40652973-0,00015913i$	$0,000587$	$0,014449$
$0,44$	$0,22$	$0,69544073+0,00671659i$	$0,69719428+0,00023809i$	$0,001721$	$0,247479$
$0,44$	$0,33$	$-1,59838607+0,01127991i$	$-1,59834887+0,00019016i$	$0,000077$	$0,004817$
$0,44$	$0,44$	$-1,29419004+0,01443373i$	$-1,29599750+0,000026431i$	$0,001727$	$0,133432$
$0,44$	$0,55$	$1,11468354+0,01431017i$	$1,11267021-0,00018031i$	$0,002105$	$0,189201$
$0,44$	$0,66$	$1,71316278+0,01094821i$	$1,71276816-0,00031166i$	$0,000429$	$0,025081$
$0,44$	$0,77$	$-0,47262409+0,00630739i$	$-0,47117343-0,00031346i$	$0,001493$	$0,316792$
$0,55$	$0,22$	$0,71480911-0,00112327i$	$0,71755223+0,00034171i$	$0,002742$	$0,383644$
$0,55$	$0,33$	$-1,64476930+0,00199295i$	$-1,64471619+0,00027907i$	$0,000054$	$0,003302$
$0,55$	$0,44$	$-1,33087921+0,00476198i$	$-1,33364249+0,00004782i$	$0,002755$	$0,206987$
$0,55$	$0,55$	$1,14787932+0,00448023i$	$1,14493842-0,00024629i$	$0,002949$	$0,257622$
$0,55$	$0,66$	$1,76269075+0,00120961i$	$1,76241443-0,00045047i$	$0,000277$	$0,015699$
$0,55$	$0,77$	$-0,48763264-0,00218809i$	$-0,48500177-0,00047419i$	$0,002635$	$0,543409$
$0,66$	$0,22$	$0,65708899-0,00617439i$	$0,66046792+0,00041059i$	$0,003350$	$0,509809$
$0,66$	$0,33$	$-1,51366802-0,00401102i$	$-1,51359942+0,00033196i$	$0,000074$	$0,004882$
$0,66$	$0,44$	$-1,22400428-0,00146831i$	$-1,22736822+0,00006069i$	$0,003363$	$0,274759$
$0,66$	$0,55$	$1,05717523-0,00176138i$	$1,05365511-0,00028056i$	$0,003522$	$0,334222$
$0,66$	$0,66$	$1,62206977-0,00485413i$	$1,62187863-0,00053302i$	$0,000198$	$0,012228$
$0,66$	$0,77$	$-0,44986628-0,00739317i$	$-0,44648064-0,00057985i$	$0,003446$	$0,771816$

Заключение

Разработан неитерационный метод нахождения значений собственных функций возмущенных самосопряженных операторов в узлах дискретизации. Метод используется без непосредственного решения систем нелинейных уравнений, что упрощает вычислительный процесс. Проведенные численные рассчеты показали их надежность и вычислительную эффективность по сравнению с известными методами Крылова А.Н. и Данилевского А.М.

Литература

1. Свиридюк, Г.А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, А.А. Баязитова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия «Физ.-мат. науки». – 2009. – №1(18). – С. 6–17.

2. Свиридюк, Г.А. Устойчивость уравнений Хоффа на графе / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина, П. О. Пивоварова // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серия «Физ.-мат. науки». – Самара, 2010. – № 1(15). – С. 6–15.

3. Кожанов, А.И. Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа / А.И. Кожанов // Вестн. ЮУрГУ, Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – №5 (264), вып. 11. — С. 33–45.

4. Кадченко, С.И. Нахождение значений первых собственных функций возмущенных дискретных операторов с простым спектром / С.И. Кадченко, С.Н. Какушкин // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2012. – №5 (264), вып. 11. – С. 25–33.

5. Кадченко, С.И. Численный метод нахождения собственных значений дискретных полуограниченных снизу операторов / С.И. Кадченко, Л.С. Рязанова // Вестн. ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2011. – №17 (234), вып. 8. – С. 46–51.

Кадченко Сергей Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kadchenko@masu.ru.

Какушкин Сергей Николаевич, аспирант, кафедра «Прикладная математика и вычислительная техника», Магнитогорский государственный университет (г. Магнитогорск, Российская Федерация), kakushkin-sergei@mail.ru.

MSC 47A75

The Algorithm of Finding of Meanings of Eigenfunctions of Perturbed Self-Adjoin Operators Via Method of Regularized Traces

S.I. Kadchenko, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation),
S.N. Kakushkin, Magnitogorsk State University (Magnitogorsk, Russian Federation)

The article is a continuation of the work, which accordance with development numerical noniterations method, allowing to find meanings of first eigenfunctions perturbed self-adjoin operators in the nodes of the sampling. Difficulty of the using method RT without direct decision of the systems of the nonlinear equations connected with expression of meanings of eigenfunctions of perturbed discrete operators from product the eigenfunction of the perturbed operator on its associate. In this work is offered computing efficient algorithm, allowing avoid this difficulty. The designed methods was checked on example of the spectral problem of the finding of meanings of eigenfunctions of perturbed Laplas's operator. From result of the calculation is seen that found meanings of eigenfunctions well agree with result, got by well-known methods by A. N. Krylov and A. M. Danilevskiy.

Keywords: eigenvalues, eigenfunctions, ≪weighted≫ corrections of the perturbation theory, self-adjoin operators.

Литература

1. Sviridyuk G.A., Bayazitova A.A. About Direct and Inverse Problems for the Equations of Hoff on the Graph [O pryamoy i obratnoy zadachah dlya uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. Sam. gos. tehn. un-ta, Ser. fiz.-mat. nauki [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences]*, 2009, no. 1 (18), pp. 6–17.
2. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A., Pivovarova P.O. Stability of the Hoff's Equations on the Column [Ustoychivost' uravneniy Hoffa na grafe]. *Vestn. SamGTU. Ser.: Fiz.-mat. nauki [The Bulletin of the Samara State Engineering University, Series of Physical and Mathematical Sciences]*, 2010, no. 1 (15), pp. 6–15.
3. Kozhanov A.I. Linear Inverse Problems for a Class of Degenerate Equations of Sobolev Type. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2012, no. 5 (264), issue 11, pp. 33–45. (in Russian)
4. Kadchenko S.I., Kakushkin S.N. Meanings of the First Eigenfunctions of Perturbed Discrete Operator with Simple Spectrum Finding. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2012, no. 5 (264), issue 11, pp. 25–33. (in Russian)
5. Kadchenko S.I., Ryazanova L.S. The Numerical Method of Finding Eigenvalues of the Discrete Semi Bounded From Below Operator. *Bulletin of South Ural State University. Series ≪Mathematical Modelling, Programming & Computer Software≫*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 46–51. (in Russian)

Поступила в редакцию 27 июня 2012 г.