УДК 517.9 + 519.216.2

СТОХАСТИЧЕСКИЕ НЕПОЛНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С АДДИТИВНЫМ БЕЛЫМ ШУМОМ

А.А. Замышляева

Теория уравнений соболевского типа переживает эпоху своего расцвета. Большое число исследований посвящено детерминированным уравнениям и системам. Однако в натурных экспериментах возникают математические модели, содержащие случайные возмущения, например, в виде белого шума. Поэтому в последнее время все чаще появляются исследования, посвященные стохастическим дифференциальным уравнениям. В данной работе в рамках теории уравнений соболевского типа рассмотрена математическая модель Буссинеска – Лява с аддитивным белым шумом. При изучении модели полезными оказались методы и результаты теории уравнений соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами. Поскольку модель представлена вырожденным уравнением математической физики, то к ней трудно применимы существующие ныне подходы Ито – Стратоновича – Скорохода. Мы используем уже хорошо зарекомендовавший себя при решении уравнений соболевского типа метод фазового пространства, заключающийся в редукции сингулярного уравнения к регулярному, определенному на некотором подпространстве исходного пространства. В первой части статьи собраны основные факты теории (L, p)-ограниченных операторов. Во второй – рассмотрена задача Коши для стохастического линейного уравнения соболевского типа высокого порядка. В качестве примера приведена математическая модель Буссинеска – Лява.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, пропагаторы, белый шум, винеровский процесс.

Введение

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Их систематическое изучение началось в середине прошлого века после основополагающих работ С.Л. Соболева, хотя многие представители этого класса были получены и изучены ранее, в частности, знаменитая система уравнений Навье – Стокса (см. прекрасный исторический обзор в [1]). В настоящее время исследования уравнений соболевского типа растут лавинообразно, упомянем здесь лишь несколько монографий, вышедших в последнее время и примыкающих к нашей проблематике [2 – 7]. Неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Av^{(n)} = Bv + g \tag{1}$$

в предположении $\ker A \neq \{0\}$ изучались в различных аспектах [8 – 10]. Здесь операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$ (т.е. линейны и непрерывны), $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – банаховы пространства, свободный член $g = g(t)$ моделирует детерминированную внешнюю нагрузку, натуральное число $n \geq 2$. Прообразом (1) служит уравнение

$$(\lambda - \Delta)v_{tt} = \alpha\Delta v + g, \tag{2}$$

моделирующее возмущение свободной поверхности несжимаемой жидкости при условии потенциальности движения и сохранении массы в слое [11], продольные колебания упругого стержня [12], а также возникающее при изучении звуковых волн в смектиках [13].

Принципиальный недостаток модели (2) с детерминированным свободным членом заключается в том, что в натурных экспериментах правая часть подвержена случайным возмущениям, например, в виде белого шума. Стохастические обыкновенные дифференциальные уравнения с различными аддитивными случайными процессами (т.е. рассматривается не только белый шум, но и более общие марковские и диффузионные процессы) сейчас активно изучаются [14]. Первенствует здесь традиционный подход Ито–Стратоновича–Скорохода, хотя в последнее время возникли многообещающие направления [15, 16]. Появились первые результаты по стохастическим уравнениям соболевского типа [17], базирующиеся на распространении подхода Ито – Стратоновича – Скорохода на уравнения в частных производных (см., например, [18]). Мы рассмотрим стохастическое уравнение соболевского типа высокого порядка

$$Ad\xi^{(n-1)} = (B\xi + g)dt + Ndw. \tag{3}$$

Здесь в правой части символом dw обозначен *белый шум*, представляющий собой обобщенный дифференциал от винеровского процесса $w(t)$. Требуется определить случайный процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий (в некотором смысле) уравнению (3) при условиях

$$\xi^{(m)}(0) = \xi_m, \ m = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

где ξ_m – заданные случайные величины. Поскольку производная $d\xi^{(n-1)}$ и белый шум корректно определены только в терминах обобщенных функций, прямое исследование подобного уравнения весьма сложно. Мы привлекаем к исследованию следующий прием: сначала мы переходим к стохастическому дифференциальному уравнению

$$A(\xi^{(n-1)}(t) - \xi_{n-1}) = \int_0^t (B\xi(s) + g(s))ds + \int_0^t Ndw,$$

а затем при нахождении решения данного уравнения исследуем стохастический интеграл от детерминированной функции по белому шуму.

Кроме настоящего введения, статья содержит три параграфа. Первый посвящен детерминированным линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка с (A, p)-ограниченным оператором B в правой части. Второй параграф посвящен стохастическим линейным уравнениям соболевского типа высокого порядка. В третьем, абстрактные результаты иллюстрируются начально-краевой задачей для стохастического уравнения Буссинеска – Лява с аддитивным белым шумом.

1. Детерминированные уравнения

Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ – сепарабельные банаховы пространства, операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$, причем оператор B (A, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. В этом случае пространства $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{G}$ расщепляются в прямые суммы $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^0 \oplus \mathfrak{V}^1$ и $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^0 \oplus \mathfrak{G}^1$, причем $\mathfrak{V}^0 \supset \ker A$. Обозначим через $A_k(B_k)$ сужение оператора $A(B)$ на подпространство $\mathfrak{V}^k, k = 0, 1$. Справедлива [5, гл. 4],

Лемма 1. *Операторы $A_k, B_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^k; \mathfrak{G}^k), k = 0, 1$; причем существуют операторы $B_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^0; \mathfrak{V}^0)$ и $A_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1; \mathfrak{V}^1)$.*

Постороим множество $\sigma_n^A(B) = \{\mu^n : \mu \in \sigma^A(B)\}$; оно компактно в $\mathbb{C}$ в силу компактности A-спектра $\sigma^A(B)$ оператора B. Возьмем замкнутый контур $\gamma = \{|\mu| = r : r > \lambda, \lambda \in \sigma_n^A(B)\}$ и построим оператор функции

$$V_m^t = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu^{n-m-1}(\mu^n A - B) A e^{\mu t} d\mu,$$

где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, а интеграл понимается в смысле Римана.

Лемма 2. *$V_m^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{V}^1))$, $\left(V_m^t\right)_t^{(l)} = V_{m+l}^t$, где $m = 0, 1, \ldots, n-1$, $l = 0, 1, \ldots, m$; $\left(V_m^t\right)_t^{(l)}\Big|_{t=0} = \mathbb{O}$ при $m \neq l$ и $\left(V_m^t\right)_t^{(l)}\Big|_{t=0}$ – проектор $\mathfrak{V}$ на $\mathfrak{V}^1$ вдоль $\mathfrak{V}^0$.*

Рассмотрим теперь неполное линейное уравнение соболевского типа высокого порядка

$$Av^{(n)} = Bv. \tag{5}$$

Вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ назовем решением уравнения (5), если она обращает уравнение (5) в тождество при любом $t \in \mathbb{R}$. Решение $v = v(t)$ уравнения (5) назовем решением задачи Коши

$$v^{(m)}(0) = v_m, \ m = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{6}$$

для уравнения (5) (или просто решением задачи (5),(6)), если оно удовлетворяет условиям (6).

Лемма 3. *Для любых $v_m \in \mathfrak{V}^1$ существует единственное решение $v = v(t)$ задачи (5), (6), которое к тому же имеет вид $v(t) = \sum\limits_{m=0}^{n-1} V_m^t v_m$.*

Наконец, следуя традиционной схеме, рассмотрим однородную (т.е. $v_m = 0, m = 0, 1, \ldots, n-1$) задачу (6) для неоднородного неполного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$Av^{(n)} = Bv + g, \tag{7}$$

где $g : [0, \tau) \to \mathfrak{G}$ – некоторая вектор-функция. Как нетрудно обнаружить, его единственным (в силу леммы 3) формальным решением будет вектор-функция

$$v(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} A_1^{-1} Q g(s) ds, \tag{8}$$

где $H = B_0^{-1}A_0$, а $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{G})$ – проектор на $\mathfrak{G}^1$ вдоль $\mathfrak{G}^0$. Однако поскольку

$$v^{(m)}(0) = -\sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn+m)}(0),$$

то вектор-функция (8) *не удовлетворяет* однородным начальным условиям (6). В общей теории уравнений соболеского типа эта трудность преодолевается заменой задачи Коши на задачу Шоуолтера – Сидорова (см., например, [19]). Однако, поскольку мы намереваемся изучать стохастические явления в таких уравнениях, то мы пока что будем придерживаться традиционной парадигмы задачи Коши. Итак, подытожим наши рассмотрения.

Теорема 1. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}_+$, тогда для любой вектор-функции $g \in C^\infty((0, \tau); \mathfrak{G}) \cap C^{pn+n-1}([0, \tau); \mathfrak{G})$ и для любых векторов $v_m \in \mathfrak{V}^1, m = 0, 1, \ldots, n-1$, существует единственное решение $v \in C^\infty((0, \tau); \mathfrak{V}) \cap C^{n-1}([0, \tau); \mathfrak{V})$ задачи Коши*

$$v^{(m)}(0) = v_m - \sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn+m)}(0) \ m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

которое к тому же имеет вид

$$v(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t v_m - \sum_{q=0}^{p} H^q B_0^{-1}(\mathbb{I} - Q)g^{(qn)}(t) + \int_0^t V_{n-1}^{t-s} A_1^{-1} Q g(s) ds.$$

Замечание 1. Немного отходя от стандарта, множество $\mathfrak{V}^1$ будем называть фазовым пространством уравнения (5) как множества допустимых начальных значений задачи Коши (6), содержащего все решения уравнения (5). В свое оправдание приведем следующее соображение: при переходе от уравнения (5) к системе первого порядка фазовым пространством полученной системы будет служить множество $(\mathfrak{V}^1)^n$.

2. Задача Коши для уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом

Пусть $\Omega = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathfrak{U}$ – банахово пространство, наделенное борелевской σ-алгеброй. Отображение $\xi : \Omega \to \mathfrak{U}$ назовем *случайной величиной*, множество случайных величин обозначим символом $\mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$. В этом множестве выделим пространства Лебега $L_q(\Omega; \mathfrak{U})$, $q \in [0, +\infty)$, и заметим, что вложение $L_q(\Omega; \mathfrak{U}) \hookrightarrow L_r(\Omega; \mathfrak{U})$ плотно и непрерывно, если $q \geq r$, а множество Ω ограничено.

Пусть $\mathfrak{I}_a^b \subset \mathbb{R}$ – некоторый промежуток, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Рассмотрим следующие отображения: $f : \mathfrak{I}_a^b \to \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$, которое каждому $t \in \mathfrak{I}_a^b$ ставит в соответствие $\xi \in \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$, и $g : \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U}) \times \Omega \to \mathfrak{U}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие $\xi(\omega) \in \mathfrak{U}$. *Случайным процессом* мы называем отображение $\eta : \mathfrak{I}_a^b \times \Omega \to \mathfrak{U}$, имеющее вид $\eta = \eta(t, \omega) = g(f(t), \omega)$. Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}_a^b$ случайный процесс $\eta = \eta(t, \cdot)$ является случайной величиной, т.е. $\eta(t, \cdot) \in \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ случайный процесс $\eta = \eta(\cdot, \omega)$ называется (*выборочной*) *траекторией*. Множество случайных процессов со значениями в $\mathfrak{U}$ мы обозначим символом $\mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$. Случайный процесс $\eta \in \mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$ будем обозначать символами $\eta = \eta(t)$, считая его зависимость от второй переменной $\omega \in \Omega$ имеющей место по умолчанию.

Через $L_q(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$ обозначим множество $\{\eta \in \mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U}) : \eta(t, \cdot) \in L_q(\Omega; \mathfrak{U})$ при всех $t \in \mathfrak{I}_a^b\}$, $q \in [1, +\infty)$. Напомним, что $\eta \in \mathcal{P}(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$ называется *случайным процессом с п.н. непрерывными траекториями*, если для почти всех $\omega \in \Omega$ отображение $\eta(\cdot, \omega)$ непрерывно. Множество случайных процессов из $L_q(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$, чьи траектории п.н. непрерывны, обозначим через $L_q^0(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$.

Пусть $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ – симметрический положительно определенный оператор, $Tr(K) < \infty$.

Определение 1. Случайный процесс $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{U})$ называется *K-винеровским процессом*, если

(i) $w(0) = 0$;

(ii) w – случайный процесс с независимыми приращениями, т.е. для любого конечного набора $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{m-1} \leq t_m < \infty$ случайные величины $w(t_1), w(t_2) - w(t_1), \dots, w(t_m) - w(t_{m-1})$ независимы.

(iii) Приращения имеют гауссовское распределение, точнее
$P \circ (w(t) - w(s))^{-1} = N(0, (t - s)K),\ 0 \leq s \leq t$

Лемма 4. *Случайный процесс $w \in L_2(\mathfrak{I}_a^b \times \Omega; \mathfrak{U})$ является K-винеровским процессом точно тогда, когда*

$$w(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \beta_k(t) e_k, \tag{9}$$

где λ_k – собственные значения оператора K, e_k – соответствующие им ортонормированные собственные функции, $\beta_k(t)$ – независимые стандартные броуновские движения на $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ с действительными значениями. Для $T > 0$ ряд (9) сходится в $L_2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P}; C([0, T]; \mathfrak{U}))$. В частности, для каждого $K \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $K \geq 0$, $Tr(K) < \infty$ существует K-винеровский процесс.

Лемма 5. *Траектории $w(\cdot)$ винеровского процесса п.н. недифференцируемы в любой точке $t \in \mathbb{R}_+$ и на любом промежутке $\mathfrak{I}_a^b \subset \mathbb{R}_+$ имеют неограниченную вариацию.*

Это свойство – главная помеха при математическом изучении белого шума. Вернемся к задаче (3),(4). Не ограничивая общности, положим $g = 0$.

Определение 2. *$\mathfrak{G}$-значный процесс $\xi(t),\ t \in [0,T]$ назовем решением задачи (3),(4), если при всех $t \in [0,T]$*

$$A(\xi^{(n-1)}(t) - \xi_{n-1}) = \int_0^t B\xi(s)ds + \int_0^t N dw\ P - п.н.$$

причем

$$\xi^{(m)}(0) = \xi_m,\ m = 0,1,\ldots,n-2\ P - п.н..$$

Пусть $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{G}^1)$ – $\mathfrak{G}^1$- значный K-винеровский процесс. Тогда его обобщенный дифференциал, представляющий собой белый шум dw, также принадлежит пространству $\mathfrak{G}^1$. Таким образом, если оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1)$, то задача (3),(4) п.н распадается на две независимые задачи

$$H(\xi^0)^{(n)} = \xi^0, \quad \xi^0(0) = \xi_0^0, \ldots, (\xi^0)^{(n-1)}(0) = \xi_{n-1}^0, \tag{10}$$

$$d(\xi^1)^{(n-1)} = S\xi^1 + A_1^{-1}Ndw, \quad \xi^1(0) = \xi_0^1, \ldots, (\xi^1)^{(n-1)}(0) = \xi_{n-1}^1, \tag{11}$$

где операторы $H = B_0^{-1}A_0$, $S = A_1^{-1}B_1$; случайные процессы $\xi^0 = (I-P)\xi$,$\xi^1 = P\xi$; случайные величины $\xi_l^k \in L_2(\Omega; \mathfrak{V}^k)$, $k = 0,1 \quad l = 0,\ldots,n-1$.

Рассмотрим сначала задачу (10). В силу (A,p)-ограниченности оператора B оператор $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}^0)$ нильпотентен степени не выше p, и можно убедиться, что уравнение в задаче (10) имеет единственное, причем P-п.н. тривиальное, решение. Следовательно, задача (10) разрешима только при нулевых начальных значениях $\xi_0^0,\ldots,\xi_{n-1}^0$, а для разрешимости задачи (3),(4) необходимо, чтобы все начальные значения $\xi_0,\ldots,\xi_{n-1}$ P-п.н. принадлежали пространству $L_2(\Omega; \mathfrak{V}^1)$.

Вернемся к задаче (11). Поскольку производная $d\xi^{(n-1)}$ и белый шум корректно определены только в терминах обобщенных функций, прямое исследование подобного уравнения весьма сложно. Поэтому, сначала мы перейдем к стохастическому дифференциальному уравнению

$$(\xi^1)^{(n-1)}(t) - \xi_{n-1} = \int_0^t S\xi(s)ds + \int_0^t A_1^{-1}Ndw. \tag{12}$$

Как нетрудно обнаружить, ее единственным формальным решением будет случайный процесс

$$\xi^1(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t \xi_m + \int\limits_0^t V_{n-1}^{t-s}A_1^{-1}Ndw(s). \tag{13}$$

Следуя традиционной схеме, рассмотрим однородную (т.е. $\xi_m = 0, m = 0,1,\ldots,n-1$) задачу (3). Аналогично Н.Винеру, представим стохастический интеграл по белому шуму в следующем виде:

$$\int\limits_0^t V_{n-1}^{t-s}A_1^{-1}Ndw(s) = -\int\limits_0^t \frac{d}{dt}V_{n-1}^{t-s}A_1^{-1}Nw(s)ds = -\int\limits_0^t V_{n-2}^{t-s}A_1^{-1}Nw(s)ds,$$

где интеграл

$$I(t) = \int_0^t V_{n-2}^{t-s} A_1^{-1N} w(s) ds \tag{14}$$

понимается как потраекторный (т.е. для каждого $\omega \in \Omega$) интеграл Римана по отрезку $[0, t]$ от непрерывной функции $V_{n-2}^{t-s} A_1^{-1} w(s, \omega)$. Можно показать, что в силу свойств пропагаторов и непрерывности траекторий K-винеровского процесса, интеграл $I \in C^{n-1}((0, T); \mathfrak{V}^1)$, причем

$$I^{(m)}(t) = \int_0^t V_{n-m-2}^{t-s} A_1^{-1} N w(s) ds, \quad m = 0, \ldots, n-2;$$

$$I^{(n-1)}(t) = A_1^{-1} N w(s) + \int_0^t \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (\mu^n A - B)^{-1} B e^{\mu(t-s)} d\mu A_1^{-1} N w(s) ds.$$

Следовательно, формула (13) определяет единственное «классическое» решение задачи (3),(12) и искомое решение задачи (10). Кроме того, при фиксированном t случайная величина $I(t)$ имеет гауссовское распределение. Это следует из построения интеграла и факта, что для элементарных детерминированных процессов стохастический интеграл является гауссовской случайной величиной. При этом коварационный оператор имеет вид:

$$Cov(I(t)) = \int_0^t V_{n-1}^s A_1^{-1} N K N^* (A_1^{-1})^* (V_{n-1}^s)^* ds.$$

Теорема 2. *Пусть оператор B (A, p)-ограничен, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{G}^1)$. Пусть $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{G}^1)$ – $\mathfrak{G}^1$-значный K-винеровский процесс, причем при некотором $T > 0$*

$$\int_0^T \|V_{n-1}^s A_1^{-1} N\|_{L_2^0}^2 ds = \int_0^T Tr(V_{n-1}^s A_1^{-1} N K N^* (A_1^{-1})^* (V_{n-1}^s)^*) ds < \infty.$$

Тогда для любых попарно независимых $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1} \in L_2(\Omega; \mathfrak{V}^1)$, независимых с w при каждом фиксированном t, существует решение задачи (3), (4):

$$\xi(t) = \sum_{m=0}^{n-1} V_m^t \xi_m - I(t). \tag{15}$$

3. Задача Коши для стохастического уравнения Буссинеска – Лява с аддитивным белым шумом

Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей ∂D класса C^∞. В цилиндре $D \times [0, T]$, $T \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим задачу Коши – Дирихле

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x), \quad x \in D, \tag{16}$$

$$\xi(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial D \times [0, T] \tag{17}$$

для уравнения

$$(\lambda - \Delta_x) d_t \xi_t = \alpha \Delta_x \xi dt + dw. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{V} = \left\{ v \in W_2^2(D) : v(x) = 0, x \in \partial D \right\}$ и $\mathfrak{G} = L_2(D)$. Простанство $\mathfrak{V}$ — банахово с нормой

$$\|v\|_{\mathfrak{V}}^2 = \int\limits_D (\sum_{k,l=1}^n v_{x_k x_l}^2 + \sum_{k=1}^n v_{x_k}^2 + v^2) dx,$$

а пространство $\mathfrak{G}$ — гильбертово со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Формулой

$$\langle Lv, w \rangle = \sum_{k=1}^n \int\limits_D v_{x_k x_k} w dx, v, w \in \mathfrak{V},$$

зададим оператор $L : \mathfrak{V} \to \mathfrak{G}$. Справедлива

Лемма 6. [5] Оператор $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{V}; \mathfrak{G})$, его спектр $\sigma(L)$ вещественен, отрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке $-\infty$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ множество собственных значений оператора L, занумерованных по невозрастанию с учетом кратности, а через φ_k – множество соответствующих собственных функций, ортонормированных в смысле $\mathfrak{G}$. Положим $A = \lambda - L, B = \alpha L$. Имеет место

Лемма 7. [5] При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор B $(A, 0)$-ограничен.

Построим пропагаторы уравнения (18):

$$V_0^t = \sum_{\lambda > \lambda_k} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}} t (\cdot, \varphi_k) \varphi_k + \sum_{\lambda < \lambda_k} \cos \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}} t (\cdot, \varphi_k) \varphi_k,$$

$$V_1^t = \sum_{\lambda < \lambda_k} \sqrt{\frac{\lambda - \lambda_k}{\alpha \lambda_k}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}} t (\cdot, \varphi_k) \varphi_k + \sum_{\lambda > \lambda_k} \sqrt{\frac{\lambda_k - \lambda}{\alpha \lambda_k}} \sin \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}} t (\cdot, \varphi_k) \varphi_k.$$

Кроме того,

$$V_1^{t-s} A_1^{-1} = \sum_{\lambda < \lambda_k} \frac{(\cdot, \varphi_k) \varphi_k}{\sqrt{(\lambda - \lambda_k) \alpha \lambda_k}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda - \lambda_k}} (t - s) +$$

$$+ \sum_{\lambda > \lambda_k} \frac{(\cdot, \varphi_k) \varphi_k}{-\sqrt{(\lambda_k - \lambda) \alpha \lambda_k}} \sin \sqrt{\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda_k - \lambda}} (t - s).$$

В силу теорем 1, 2 и леммы 2 имеет место

Теорема 3. *Пусть $w \in L_2^0(\mathbb{R}_+ \times \Omega; \mathfrak{G}^1)$ – $\mathfrak{G}^1$-значный K-винеровский процесс. (В качестве K возьмем оператор Грина $-L^{-1}$,который будет ядерным, если $n = 1, 2, 3$.) Тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in \mathbb{R}_+$, для любых независимых $\xi_0, \xi_1 \in L_2(\Omega; \mathfrak{V}^1)$, независимых с w при каждом фиксированном t, существует п.н. решение задачи (3), (4), которое к тому же имеет вид:*

$$\xi(t) = V_0^t \xi_0 + V_1^t \xi_1 + \int\limits_0^t V_1^{t-s} A_1^{-1} dw(s). \tag{15}$$

Литература

1. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.Y.; Basel;Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
2. Showalter, R.E. Hilbert space methods for partial differential equations / R.E. Showalter. – Pitman; London; San Francisco; Melbourne, 1977.
3. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
4. Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
5. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
6. Al'shin, A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations /A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. – Series in nonlinear analisys and applications, 15, De Gruyter, 2011.
7. Кожанов, А.И. Краевые задачи для уравнений математической физики нечетного порядка / А.И. Кожанов.– Новосибирск: НГУ, 1990.
8. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства линейных динамических уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, Т.В. Апетова // ДАН. – 1993. – Т. 330, №6. – С. 696–699.
9. Свиридюк, Г.А. Линейные уравнения типа Соболева высокого порядка / Г.А. Свиридюк, О.В. Вакарина // ДАН. – 1998. – Т. 393, №3. – С. 308–310.
10. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа высокого порядка / Г.А. Свиридюк, А.А. Замышляева // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, №2. – С. 252–260.
11. Wang, S. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation / S. Wang, G. Chen. – Mathematical Analysis and Application. – 2002. – V. 274. – P. 846–866.
12. Уизем, Дж. Линейные и нелинейные волны / Дж. Уизем. – М.: Мир, 1977.
13. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987.
14. Gliklikh, Yu.E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu.E. Gliklikh. – London; Dordrecht; Heidelberg; N.-Y.: Springer, 2011.
15. Melnikova, I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions In Spaces Of Abstract Stochastic Distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Mathematical Sciences. – 2003. – V. 116, №5. – P. 3620–3656.
16. Шестаков, А.Л. О новой концепции белого шума / А.Л. Шестаков, Г.А. Свиридюк // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 287–288.
17. Загребина, С.А. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом / С.А. Загребина, Е.А. Солдатова // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 252–254.
18. Ková́cs, M. Introduction to stochastic partial differential equations / M. Ková́cs, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8-12, 2007. Publications of the ICMCS. – 2008. – V. 4. – P. 159–232
19. Свиридюк, Г.А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – Иркутск, 2010. – Т. 3, №1. – С. 51–72.

Алена Александровна Замышляева, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра «Уравнения математической физики», Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск, Российская Федерация), alzama@mail.ru.

MSC 60H30

Stochastic Incomplete Linear Sobolev Type High-Ordered Equations with Additive White Noise

A.A. Zamyshlyaeva, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

Sobolev type equations theory experiences an epoch of blossoming. The majority of researches is devoted to the determined equations and systems. However in natural experiments there are the mathematical models containing accidental indignation, for example, white noise. Therefore recently even more often there arise the researches devoted to the stochastic differential equations. In the given work the Boussinesq – Lòve model with additive white noise is considered within the Sobolev type equations theory. At studying the methods and results of theory of Sobolev type equations with relatively p-bounded operators were very useful. As the model is presented by the degenerate equation of mathematical physics, so it is difficult to apply existing nowadays Ito – Stratonovich – Skorokhod approaches. We use already well proved at the investigation of Sobolev type equations the phase space method consisting in a reduction of singular equation to regular one, defined on some subspace of initial space. In the first part of article some facts of (A, p)-bounded operators are collected. In the second – the Cauchy problem for the stochastic Sobolev type equation of high order is investigated. As an example the stochastic Boussinesq – Lòve model is considered.

Keywords: Sobolev type equation, propagator, white noise, Wiener process.

References

1. Demidenko G.V., Uspenskii S.V. *Partial Differential Equations and Ssystems Not Solvable with Respect to the Highest Order Derivative.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 2003.
2. Showalter R.E. *Hilbert space methods for partial differential equations.* Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1977.
3. Favini A., Yagi A. *Degenerate differential equations in Banach spaces.* N.Y., Basel, Hong Kong, Marcel Dekker, Inc., 1999.
4. Sidorov N., Loginov B., Sinithyn A., Falaleev M. *Lyapunov-Shmidt methods in nonlinear analysis and applications.* Dordrecht, Boston, London, Kluwer Academic Publishers, 2002.
5. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators.* Utrecht, Boston, Köln, Tokyo, VSP, 2003.
6. Al'shin A. B., Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. *Blow-up in nonlinear Sobolev type equations.* Series in nonlinear analisys and applications, 15, De Gruyter, 2011.
7. Kozhanov A.I. *Boundary problems for odd ordered equations of mathematical physics.* Novosibirsk, NGU, 1990.
8. Sviridyuk G.A., Apetova T.V. The Phase Spaces of Linear Dinamic Sobolev Type Equations *DAN*, 1993, vol. 330, no. 6, pp. 696–699. (in Russian)
9. Sviridyuk G.A., Vakarina O.V. Linear Sobolev Type Equations of Higher Order. *DAN*, 1998, vol. 393, no. 3, pp. 308–310. (in Russian)

10. Sviridyuk G. A., Zamyshlyaeva A.A. The Phase Spaces of a Class of Linear Higher-order Sobolev Type Equations. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 2. pp. 269–278.
11. Wang S., Chen G. Small amplitude solutions of the generalized IMBq equation. *Mathematical Analysis and Application*, 2002, vol. 274, pp. 846–866.
12. Uizem G. *Linear and Nonlinear Waves.* M., Mir, 1977.
13. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theoretical Phisics, VII. Elasticity Theory.* Moscow, Nauka, 1987. (in Russian)
14. Gliklikh Yu.E. *Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics.* London, Dordrecht, Heidelberg, N.-Y., Springer, 2011.
15. Melnikova I.V., Filinkov A.I., Alshansky M.A. Abstract Stochastic Equations II. Solutions In Spaces Of Abstract Stochastic Distributions. *Journal of Mathematical Sciences*, 2003, vol. 116, no. 5, pp. 3620–3656.
16. Shestakov A.L., Sviridyuk G. A. On a New Conception of White Noise. *Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki*, Moscow, 2012, vol. 19, issue 2, pp. 287–288. (in Russian)
17. Zagrebina S.A., Soldatova E.A. The Barenblatt – Zheltova – Kochina Equation with White Noise. *Obozrenie Prikladnoy i Promyshlennoy Matematiki*, M., 2012, vol. 19, issue 2, pp. 252–254.(in Russian)
18. Kovács M., Larsson S. Introduction to Stochastic Partial Differential Equations *Proceedings of ≪New Directions in the Mathematical and Computer Sciences≫, National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. Publications of the ICMCS*, 2008, vol. 4, pp. 159–232.
19. Sviridyuk G.A., Zagrebina S.A. The Showalter – Sidorov Problem as a Phenomena of the Sobolev type Equations. *Journal ≪News of Irkutsk State University≫. Series ≪Mathematics≫*, Irkutsk, 2010, vol. 3, no. 1, pp. 51–72. (in Russian)

Поступила в редакцию 4 сентября 2012 г.