УДК 517.633

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

И.Е. Егоров, И.М. Тихонова

В работе изучается краевая задача В.Н. Врагова для уравнения смешанного типа второго порядка, когда уравнение принадлежит эллиптическому типу вблизи оснований цилиндрической области. С помощью стационарного метода Галеркина доказана однозначная регулярная разрешимость краевой задачи при определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения. При этом установлены априорные оценки для уравнения смешанного типа, которым удовлетворяют приближенные решения. Получена оценка скорости сходимости стационарного метода Галеркина в норме пространства Соболева W_2^1, через собственные функции оператора Лапласа по пространственным переменным и по времени. При выводе оценки скорости сходимости метода Галеркина существенно используется разложение решения исходной краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям оператора Лапласа и известное равенство Парсеваля.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, стационарный метод Галеркина, краевая задача, неравенство, оценка.

Известно, что теории уравнений смешанного типа посвящено довольно много работ и монографий [1, 2, 5, 6, 8, 9, 11]. При этом к исследованию краевых задач для уравнений смешанного типа применялись сингулярные интегральные уравнения, функциональные методы, метод регуляризации, нестационарный метод Галеркина. В основном, с помощью стационарного метода Галеркина изучались краевые задачи для уравнений эллиптического типа [3, 4, 7]. Отметим, что в работах [3, 7] в качестве базисных функций брались собственные функции сходного оператора. В ряде работ получены оценки погрешности нестационарного метода Галеркина для эволюционных уравнений [10].

В данной работе рассматривается частный случай краевой задачи В.Н. Врагова [8], когда уравнение смешанного типа принадлежит эллиптическому типу вблизи оснований цилиндрической области. При этом получена оценка скорости сходимости стационарного метода Галеркина в норме пространства W_2^1, через собственные числа оператора Лапласа по переменным $x \in R^n$ и t.

Пусть $\Omega \subset R^n$ - ограниченная область с гладкой границей $S, Q = \Omega \times (0,T), S_T = S \times (0,T), T > 0$.

Рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu \equiv k(x,t)u_{tt} - \triangle u + a(x,t)u_t + c(x)u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

где коэффициенты уравнения (1) являются достаточно гладкими функциями.

Положим

$$P_0^{\pm} = \{(x,0) : k(x,0) \gtrless 0, x \in \Omega\}, \quad P_T^{\pm} = \{(x,T) : k(x,T) \gtrless 0, x \in \Omega\}.$$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области Q такое, что

$$u|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = 0, \;\; u_t|_{\overline{P}_0^+} = 0, \;\; u_t|_{\overline{P}_T^-} = 0. \tag{3}$$

При определенных условиях на коэффициенты и правую часть уравнения (1) в работе [8] с помощью метода регуляризации была доказана однозначная разрешимость краевой задачи (1) – (3) из пространства $W_2^2(Q)$. В работе [9] построены приближенные решения стационарного метода Галеркина, которые слабо сходятся к обобщенному решению краевой задачи (1) – (3) для одного нелинейного уравнения смешанного типа вида (1) при $k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) > 0$.

Для целого $k \geq 1$ через $||\cdot||_k$ будем обозначать норму пространства Соболева $W_2^k(Q)$ и

$$(u,v) = \int\limits_Q uvdQ, \;\; ||u|| = \sqrt{(u,u)}, \;\; u,v \in L_2(Q).$$

Пусть C_L класс гладких функций, удовлетворяющих краевым условиям (2), (3).

В дальнейшем рассмотрим случай $k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0$. Тогда существуют положительные числа $t_0 < T_0$ и δ_1, δ_2 такие, что

$$k(x,t) \leq -\delta_1 < 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0; \;\; k(x,t) \leq -\delta_2 < 0, \;\; T_0 \leq t \leq T.$$

Бесконечно дифференцируемые функции $\xi(t), \eta(t)$ выбираем следующим образом:

$$\xi(t) \geq 0, \;\; \xi(0) = \xi(T) = 0, \;\; \xi(t) = \mu, \;\; t_0 \leq t \leq T_0,$$

$$\xi_t \geq 0, \;\; 0 \leq t \leq t_0 \; ; \; \xi_t \leq 0, \;\; T_0 \leq t \leq T,$$

$$\eta(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\xi_t + 1, & 0 \leq t \leq t_0, \\ 1, & t_0 \leq t \leq T_0, \\ -\frac{1}{2}\xi_t + 1, & T_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

При этом число μ удовлетворяет условию $\mu \geq \delta^{-1}(\max\limits_{\overline{Q}} |k| + \delta)$.

Аналогично работе [11] доказываются следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть коэффициент* $c(x) > 0$ *достаточно большой и*

$$k(x,0) < 0, \;\; k(x,T) < 0, \;\; x \in \overline{\Omega} \; ; \; a - \frac{1}{2}k_t \geq \delta > 0.$$

Тогда для всех функций $u \in C_L$ справедливо неравенство

$$(Lu, \xi u_t + \eta u) \geq C_1 ||u||_1^2, \;\; C_1 > 0. \tag{4}$$

Лемма 2. *Пусть коэффициент* $k(x,t)$ *равен* $k(t)$ *и*

$$k(0) < 0, \;\; k(T) < 0 \; ; \; a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0.$$

Тогда для всех функций $u(x,t)$ из C_L имеет место неравенство

$$-(Lu, \xi\widetilde{\Delta}u_t + \eta\widetilde{\Delta}u) \geq C_2 \int\limits_Q [u_{tt}^2 + \sum_{i=1}^n u_{tx_i}^2 + (\Delta u)^2] dQ - C_3 ||u||_1^2 \, , \tag{5}$$

где $C_2,\ C_3 > 0$ и $\widetilde{\Delta} u = u_{tt} + \Delta u$.

Пусть функции $\{\varphi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормированы в $L_2(Q)$ и являются решением спектральной задачи

$$\widetilde{\Delta} v \equiv v_{tt} + \Delta v = -\lambda v, \ \ (x,t) \in Q,$$

$$v|_{S_T} = 0, \ \ v|_{t=0} = 0, \ \ v_t|_{t=T} = 0.$$

При этом λ_k - соответствующие собственные числа, удовлетворяющие условиям $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$ и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$.

Положим

$$\psi_k(x,t) = \xi(t)\varphi_{kt}(x,t) + \eta(t)\varphi_k(x,t).$$

Теорема 1. *Функции $\{\psi_k(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ линейно независимы, и множество их линейных комбинаций плотно в $L_2(Q)$.*

Доказательство теоремы 1 полностью совпадает с доказательством теоремы 1 [11].

Приближенное решение краевой задачи (1)-(3) ищется в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N \varphi_k(x,t).$$

При этом коэффициенты c_k^N определяются как решение системы алгебраических уравнений

$$(Lu^N, \psi_k) = (f, \psi_k), \ \ k = \overline{1, N}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любой функции $f \in L_2(Q)$ такой, что $f_t \in L_2(Q)$, существует единственное регулярное решение $u(x,t)$ краевой задачи (1)-(3) из пространства $W_2^2(Q)$. При этом приближенные решения $u^N(x,t)$ слабо сходятся к $u(x,t)$ в пространстве $W_2^2(Q)$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы 2 заметим, что из равенств (6) получаются соотношения

$$(Lu^N, \xi u_t^N + \eta u^N) = (f, \xi u_t^N + \eta u^N),$$
$$-(Lu^N, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N) = (f, \xi \widetilde{\Delta} u_t^N + \eta \widetilde{\Delta} u^N).$$

Отсюда в силу (4), (5) следует справедливость оценки

$$||u^N||_2 \leq C_4(||f|| + ||f_t||), \ \ C_4 > 0\ ,$$

которая позволяет получить утверждения теоремы 2. Из теоремы 1 будем иметь, что уравнение (1) выполняется для почти всех $(x,t) \in Q$. □

Теорема 3. *Пусть коэффициент $c(x) > 0$ достаточно большой, и выполнены условия*

$$k(0) < 0, \ \ k(T) < 0, \ \ a - \frac{1}{2}|k_t| \geq \delta > 0\ ; \ f, \ f_t \in L_2(Q).$$

Тогда для погрешности стационарного метода Галеркина справедлива оценка

$$||u - u^N||_1 \leq C_5(||f|| + ||f_t||)\lambda_{N+1}^{-1/4}\ , \ \ C_5 > 0,$$

где постоянная C_5 не зависит от функций f, u, u^N.

Доказательство. Для решения $u(x,t)$ краевой задачи (1)-(3), гарантированного теоремой 2, справедливы разложение в ряд Фурье

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k \ , \ \ c_k = (u, \varphi_k)$$

и неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \lambda_k^2 \leq C_6(||f||^2 + ||f_t||^2), \ \ C_6 > 0. \qquad (7)$$

Пусть H_N – линейное подпространство $W_2^1(Q)$, натянутое на $\varphi_1, ..., \varphi_N$ и P_N – оператор проектирования на H_N. Из равенств (6) нетрудно получить соотношение

$$(L(u-u^N), \xi(u-u^N)_t + \eta(u-u^N)) = (L(u-u^N), \xi(u_t - \omega_t) + \eta(u-\omega)),$$

где ω произвольный элемент из H_N.

Отсюда в силу (4), (7) при $\omega = P_N u$ получаем искомую оценку скорости сходимости стационарного метода Галеркина. □

Работа проводилась при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации(гос. контракт № 02.740.11.0609) и Правительства РС(Я)(Государственная стипендия Правительства РС (Я) аспирантам и молодым ученым на 2012 г.)

Литература

1. Бицадзе, А.В. Уравнения смешанного типа / А.В. Бицадзе. – М.: Изд-во АН СССР, 1959.
2. Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов. – М.: Наука, 1970.
3. Михлин, С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1970.
4. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. –М.: Наука, 1973.
5. Моисеев, Е.И. Уравнения смешанного типа со спектральным параметром / Е.И. Моисеев. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
6. Егоров, И.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров. – Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1995.
7. Джишкариани, А.В. О быстроте сходимости метода Бубнова-Галеркина / А.В. Джишкариани // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 1964. – Т. 4, № 2. – С. 343–348.
8. Врагов, В.Н. К теории краевых задач для уравнений смешанного типа / В.Н. Врагов // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1098–1105.
9. Ларькин, Н.А. Об одном классе нелинейных уравнений смешанного типа / Н.А. Ларькин // Сиб. мат. журн. – 1978. – Т. XIX, № 6. – С.1308–1314.
10. Виноградова, П.В. Оценка погрешности метода Галеркина для нестационарных уравнений / П.В. Виноградова, А.Г. Зарубин // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. – 2009. – Т.49, № 9. – С. 1643–1651.
11. Егоров, И.Е. О стационарном методе Галеркина для уравнения смешанного типа второго порядка / И.Е. Егоров, И.М. Тихонова // Мат. заметки ЯГУ. – 2010. – Т. 17, вып. 2. – С. 41–47.

Иван Егорович Егоров, доктор физико-математических наук, профессор, Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного Федерального университета (г. Якутск, Российская Федерация).

Ирина Михайловна Тихонова, отдел фундаментальной математики, Научно-исследовательский институт математики Северо-Восточного Федерального университета (г. Якутск, Российская Федерация), IrinaMikh3007@mail.ru.

MSC 35M12

About Convergence Speed of the Stationary Galerkin Method for the Mixed Type Equation

I.E. Egorov, Mathematics Scientific research institute NEFU (Yakutsk, Russian Federation)**,**
I.M. Tikhonova, Mathematics Scientific research institute NEFU (Yakutsk, Russian Federation)

In this paper it is investigated the boundary value problem of V.N. Vragov for mixed-type equation of second order, when equation belongs to elliptic type close to the cylindrical base region. Using a stationary Galerkin methods we prove the unique regular solvability of this boundary value problem. It was established a priori estimates for mixed-type equation. It is obtained an estimate for the rate convergence of Galerkin method in the steady-state rate of the Sobolev spaces by eigenfunctions of the Laplace operator in the spatial variables and time. For derivation of the estimate of convergence of stationary Galerkin methods we use the expantion of solution of the initial boundary value problem.

Keywords: equation of mixed type, stationary, the Galerkin method, boundary value problem, unequality, estimate.

References

1. Bitsadze A.V. *Uravnenie smeshannogo tipa* [Equation of Mixed Type]. Moscow, Akad. Nauk SSSR, 1959.
2. Smirnov M.M. *Uravnenie smeshannogo tipa* [Equation of Mixed Type]. Moscow, Nauka, 1970.
3. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1970.
4. Ladyzhensky O.A. *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973.
5. Moiseev E.I. *Uravnenie smeshannogo tipa so spektral'nym parametrom* [The Equation of Mixed Type with Spectral Parameter]. Moscow, Izd-vo Mosk. universiteta, 1988.
6. Egorov I.E., Feodorov V.E. *Neklassicheskie uravneniya matematicheskoy fiziki vysokogo poryadka* [High-Order Nonclassical Eequations of Mathematical Physics]. Novosibirsk, Vychisl. tsentr SO RAN, 1995.
7. Dgishkariani A.V. The Rate of Convergence of the Bubnov-Galerkin Method [O bystrote shodimosty metoda Bubnova-Galerkina]. *J. vich. mat. i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1964, vol. 4, no. 2, pp. 343–348.
8. Vragov V.N. To the Theory of Boundary Value Problems for Mixed-Type Equations in Space [K teorii kraevykh zadach dlya uravneniy smeshannogo tipa]. *Differentsial'nye uravneniya* [Diferential Equation], 1977, vol. 13, no. 6, pp. 1098–1105.

9. Lar'kin N.A. A Class of Nonlinear Equations of Mixed Type [Ob odnom klasse nelineynykh uravneniy smeshannogo tipa]. *Sibirskiy matem. j.* [Siberian Mathematical Journal], 1978, vol. XIX, no. 6, pp. 1308–1314.

10. Vinogradova P.V., Zarubin A.G. Error Estimation of Galerkin Method for Non-Stationary Equations [Otsenka pogreshnosty metoda Galerkina dlya nestatsionarnykh uravneniy]. *J. vich. mat. i mat. fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2009, vol. 49, no. 9, pp. 1643–1651.

11. Egorov I.E., Tikhonova I.M. On Stationary Galerkin Methods for the Second Order Equation of Mixed Type [O statsionarnom metode Galerkina dlya uravneniya smeshannogo tipa vtorogo poryadka]. *Mat. zametki YaGu*, 2010, vol. 17, no. 2, pp. 41–47.

Поступила в редакцию 14 августа 2012 г.