

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ

Д.Н. Вятченников, В.В. Кособуцкий, А.А. Носенко, Н.В. Плотникова

Недостаточная информация об объектах при разработке их систем управления восполняется использованием методов идентификации. Основные трудности при решении задачи идентификации нелинейных объектов обусловлены сложностью структуры объекта и неполнотой математического описания и информации об объекте. Объект управления приходится аппроксимировать цепочкой элементарных звеньев известной структуры, а построение модели сводится к оценке характеристик этих звеньев по данным нормальной работы объекта. Примером такой аппроксимации является представление объекта в классе моделей Гаммерштейна или Винера. После определения структуры модели, задача идентификации сводится к задаче параметрической идентификации.

## 1. Алгоритм идентификации нелинейных динамических объектов, описываемых моделью Гаммерштейна, во временной области

Объект исследования - нелинейный управляемый одномерный динамический объект с измеряемыми в дискретные моменты времени входом  $u(t)$  и выходом  $z(t)$ , представленный на рис. 1.

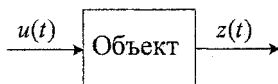


Рис. 1. Структура объекта идентификации

Нелинейные и динамические свойства таких объектов в ряде случаев невозможно четко разделить. Для упрощения задачи исследуемый нелинейный динамический объект представляют в виде некоторой комбинации линейных динамических блоков и безынерционных нелинейных блоков [1]. Одним из таких сочетаний является модель Гаммерштейна - последовательное соединение безынерционного нелинейного элемента и линейной динамической части. Измеряемыми величинами являются входной сигнал  $u(t)$  и выходной сигнал  $z(t)$ . Все помехи, воздействующие на объект, приведены к выходу в виде шума  $v(t)$  (рис. 2) [2].

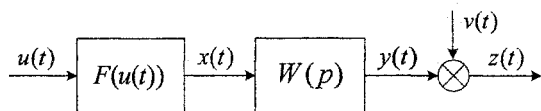


Рис. 2. Модель Гаммерштейна

Линейная динамическая часть (динамическое звено) задается передаточной функцией

$$W(p) = \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i p^i}{\sum_{j=0}^n a_j p^j}, \quad a_n = 1, \quad m \leq n. \quad (1)$$

Безынерционный нелинейный элемент описывается однозначной статической характеристикой, аппроксимируемой полиномом степени  $p$

$$x(t) = \sum_{k=1}^p c_k u^k(t). \quad (2)$$

Рассмотрим алгоритм идентификации во временной области нелинейного динамического объекта, описываемого моделью Гаммерштейна.

Линейное динамическое звено описывается дифференциальным уравнением согласно (1)

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i x^{(i)}(t). \quad (3)$$

Подставив (2) в (3), получим

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^m b_i c_k p^i u^k(t). \quad (4)$$

В (4) осуществляем замену

$$b_{ki} = c_k b_i, \quad (5)$$

тогда уравнение примет вид

$$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^m b_{ki} p^i u^k(t). \quad (6)$$

Неадекватность принятой модели, наличие неизмеряемых помех ошибок измерений охарактеризуем приведенным к выходу аддитивным шумом  $v(t)$ , аппроксимируя реальный закон распределения нормальным законом распределения, что основано на центральной предельной теореме. Стационарный случайный процесс  $v(t)$  при этом характеризуется нулевым математическим ожиданием и некоторой дисперсией.

Задача идентификации нелинейного объекта во временной области: необходимо по результатам измерений в дискретные моменты времени процессов  $u(t)$  и  $z(t)$  определить оценки параметров объекта  $b_{ki}$ ,  $i = 0, m$ ,  $k = 1, p$  и  $a_j$ ,  $j = 0, n-1$ .

Представим уравнение (6), разрешенное относительно выходной координаты  $y(t)$ , в виде структурной схемы (рис. 3).

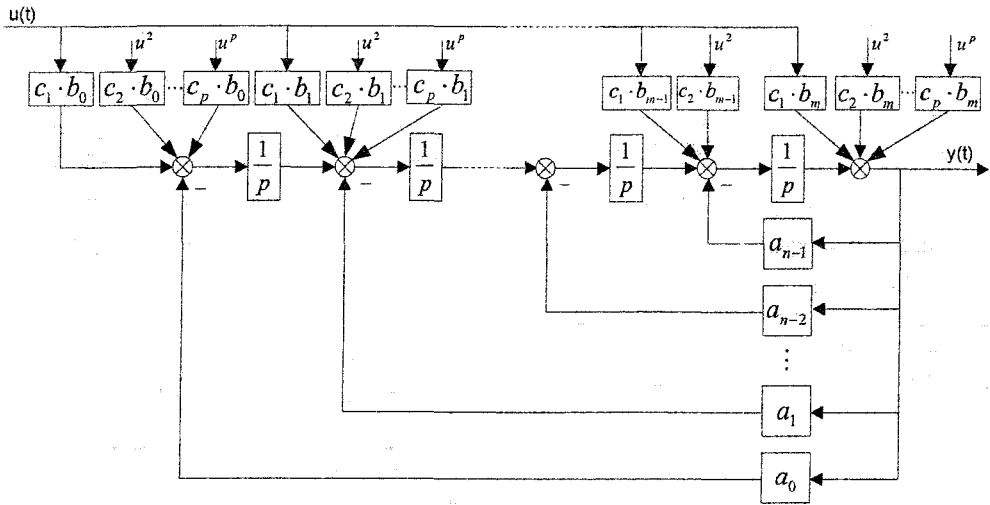


Рис. 3. Структурная схема нелинейного объекта, описываемого моделью Гаммерштейна, разрешённого относительно выходной координаты

$$\begin{aligned}
 y(t) = & - \left( a_0 \frac{1}{p^n} + a_1 \frac{1}{p^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{1}{p} \right) y(t) + \\
 & + \sum_{k=1}^p b_{k,0} u^k(t) \frac{1}{p^m} + \sum_{k=1}^p b_{k,1} u^k(t) \frac{1}{p^{m-1}} + \dots \\
 & \dots + \sum_{k=1}^p b_{k,m-1} u^k(t) \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^p b_{k,m} u^k(t) = \\
 = & \sum_{k=1}^p \sum_{i=0}^m M_{ki}(t) b_{ki} + \sum_{j=0}^{n-1} N_j(t) a_j \quad (7)
 \end{aligned}$$

где  $N_j(t)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  и  $M_i(t)$ ,  $i = \overline{0, m}$  – функции чувствительности второго рода.

По рис. 3 и выражению (7) видно, что функции чувствительности  $N_j(t)$  и  $M_{ki}(t)$  есть интегралы соответствующей кратности от выходного и входного сигналов, удовлетворяющие соотношениям:

$$\begin{cases}
 N_0(t) = -\int\int_{(n)} \dots \int y(t) dt^n; \\
 N_1(t) = -\int\int_{(n-1)} \dots \int y(t) dt^{n-1}; \\
 \vdots \\
 N_{n-1}(t) = -\int y(t) dt; \\
 M_{k0}(t) = \int\int_{(m)} \dots \int u^k(t) dt^m; \\
 M_{k1}(t) = \int\int_{(m-1)} \dots \int u^k(t) dt^{m-1}; \\
 \vdots \\
 M_{km}(t) = u^k(t),
 \end{cases} \quad (8)$$

где  $k = \overline{1, p}$ .

Для каждого коэффициента числителя  $b_i$  операторной передаточной функции линейной части имеем  $p$  функций чувствительности, рассчитанных для каждого значения коэффициента нелинейного объекта  $c_k$ . Значения функций чувствительности второго рода для заданных с постоян-

ным шагом моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_k$  определяются в результате численного интегрирования.

$$z(k) = y(k) + v(k) = H(k)\alpha(k) + v(k), \quad (9)$$

где

$$z(k) = z(t_k);$$

$$H(k) = [N_0(t_k), N_1(t_k) \dots N_{n-1}(t_k),$$

$$M_{k0}(t_k), M_{k1}(t_k) \dots M_{km}(t_k)];$$

$$\alpha(k) = [a_0(k), a_1(k) \dots a_{n-1}(k),$$

$$b_{k0}(k), b_{k1}(k) \dots b_{km}(k)]^T;$$

$v(k)$  – шум, обусловленный помехами, действующими на объект, погрешностями описания выходного сигнала функциями чувствительности второго рода (несовпадение математической модели), погрешностями вычислений на ЭВМ, рассматриваемый как некоррелированная гауссовская случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $R(k)$ .

Считая параметры объекта постоянными в течение времени идентификации, записываем соотношение для изменения во времени параметров объекта:

$$\dot{\alpha}(t) = 0.$$

или

$$\alpha(k+1) = \alpha(k). \quad (10)$$

Рассматриваем (10) как уравнение состояния некоторой системы с вектором состояния  $\alpha(k)$ , а (9) – как уравнение измерений. С учётом (9) и (10) запишем рекуррентные соотношения фильтра Калмана-Бьюси [3, 4] для оценки вектора параметров в виде

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}(k+1) = & \hat{\alpha}(k) + K(k+1) \times \\
 & \times [Z(k+1) - H(k+1)\hat{\alpha}(k)].
 \end{aligned} \quad (11)$$

Оптимальный вектор коэффициентов усиления находим из выражения

$$K(k+1) = P(k)H^T(k+1) \times \\ \times [H(k+1)P(k)H^T(k+1) + R(k+1)], \quad (12)$$

а уточнение ковариационной матрицы ошибок оценивания производится с использованием соотношения

$$P(k+1) = P(k) - K(k+1)H(k+1)P(k). \quad (13)$$

Оптимальный коэффициент усиления  $K(k+1)$  дискретного фильтра (13) позволяет обеспечить минимум среднеквадратичного отклонения ошибки фильтрации.

Процесс фильтрации (11)-(13) выполняется до достижения условия

$$\sigma_{\text{расч}} \leq \sigma_0, \quad (14)$$

где  $\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\bar{z}_i - \hat{z}_i)^2}$  – расчетная точность идентификации;  $\sigma_0$  – заданная точность идентификации;  $\bar{z}_i(t)$  – расчетное значение выходной величины;  $\hat{z}_i(t)$  – экспериментальное значение выходной величины.

При выполнении условия (14) определяются оценки параметров идентифицируемого объекта на ограниченном интервале времени, которые в дальнейшем уточняются до окончания процесса.

## 2. Алгоритм идентификации нелинейных динамических объектов, описываемых моделью Винера, во временной области

Другим вариантом представления нелинейного динамического объекта является описание объекта в классе моделей Винера. Модель Винера состоит из последовательного соединения двух блоков: линейного динамического и безынерционного нелинейного блока с однозначной статической характеристикой (рис. 4).

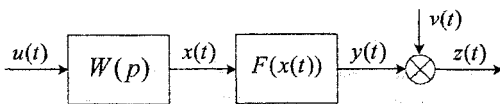


Рис. 4. Модель Винера

Измеряемыми величинами являются входной сигнал  $u(t)$  и выходной сигнал  $z(t)$ . Все помехи, воздействующие на объект, приведены к выходу и определяются шумом  $v(t)$ . Промежуточный сигнал  $x(t)$  нам неизвестен в силу физической неразделимости исследуемого объекта на линейный и нелинейный блоки.

Линейный динамический блок модели Винера описывается операторной передаточной функцией или дифференциальным уравнением

$$\sum_{j=0}^n a_j x^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}(t). \quad (15)$$

Безынерционный нелинейный блок представлен однозначной статической характеристикой, аппроксимированной полиномом степени  $p$ :

$$y(t) = F(x(t)) = \sum_{q=1}^p c_q x^q(t). \quad (16)$$

Рассмотрим способ идентификации нелинейного объекта, описываемого моделью Винера, при указанных условиях во временной области.

Воспользовавшись формулами (15) и (16):

$$\sum_{j=0}^n a_j p^j \sum_{q=1}^p \frac{1}{q \sqrt[q]{c_q}} \sqrt[q]{y(t)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}(t) \quad (17)$$

или

$$\sum_{j=0}^n \sum_{q=1}^p \frac{a_j}{q \sqrt[q]{c_q}} p^j \sqrt[q]{y(t)} = \sum_{i=0}^m b_i p^i u^{(i)}(t). \quad (18)$$

Осуществим переобозначения некоторых параметров уравнения (18) для упрощения дальнейших рассуждений

$$a_{jq} = \frac{a_j}{q \sqrt[q]{c_q}}, \quad j = \overline{0, n}, \quad q = \overline{1, p}. \quad (19)$$

Тогда уравнение (18) примет вид

$$\sum_{j=0}^n \sum_{q=1}^p a_{jq} p^j y^{1/q}(t) = \sum_{i=0}^m b_i p^i u^{(i)}(t). \quad (20)$$

Необходимо по результатам измерений в дискретные моменты времени процессов  $u(t)$  и  $z(t)$  определить оценки параметров объекта  $a_{jq}$ ,

$$j = \overline{0, n-1}, \quad q = \overline{1, p} \text{ и } b_i, \quad i = \overline{0, m}.$$

Представив с учетом (19) дифференциальное уравнение (20), разрешенное относительно выходной координаты, получим

$$y(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{q=1}^p N_{jq}(t) \frac{a_j}{q \sqrt[q]{c_q}} + \sum_{i=0}^m M_i(t) b_i - \sum_{q=2}^p y^{1/q}(t), \quad (21)$$

где  $N_{jq}(t)$ ,  $j = \overline{0, n-1}$ ,  $q = \overline{1, p}$  и  $M_i(t)$ ,  $i = \overline{0, m}$  – функции чувствительности второго рода.

Очевидно, что функции чувствительности  $N_{jq}(t)$  и  $M_i(t)$  есть интегралы соответствующей кратности от выходного и входного сигналов, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{0q}(t) = -\int\int_{(n)} \dots \int y^{1/q}(t) dt^n; \\ N_{1q}(t) = -\int\int_{(n-1)} \dots \int y^{1/q}(t) dt^{n-1}; \\ \vdots \\ N_{n-1,q}(t) = -\int y^{1/q}(t) dt; \\ M_0(t) = \int\int_{(m)} \dots \int u(t) dt^m; \\ M_1(t) = \int\int_{(m-1)} \dots \int u(t) dt^{m-1}; \\ \vdots \\ M_m(t) = u(t). \end{array} \right. \quad (22)$$

где  $q = \overline{1, p}$ .

Для каждого коэффициента знаменателя  $a_j$ ,  $j = \overline{0, n-1}$  передаточной функции линейной части имеем  $p$  функций чувствительности, кото-

рые рассчитаны для каждого значения коэффициента нелинейного объекта  $c_q$ ,  $q = \overline{1, p}$ .

Значения функций чувствительности второго рода для заданных с постоянным шагом моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_k$  будем получать на ЭВМ в результате численного интегрирования. Поэтому используем матричное представление соотношения (22), принятое в дискретных системах, в виде:

$$z(k) = y(k) + v(k) = H(k)\alpha(k) + v(k), \quad (23)$$

где

$$z(k) = z(t_k);$$

$$H(k) = [N_{0q}(t_k), N_{1q}(t_k), \dots, N_{n-1,q}(t_k),$$

$$M_0(t_k), M_1(t_k), \dots, M_m(t_k)];$$

$$\alpha(k) = [a_{0q}(k), a_{1q}(k), \dots, a_{n-1,q}(k),$$

$$b_0(k), b_1(k), \dots, b_m(k)]^T,$$

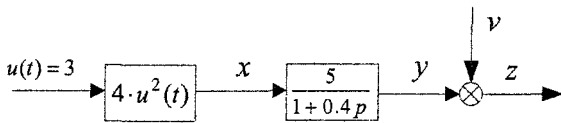
$v(k)$  - шум, обусловленный помехами, действующими на объект, погрешностями описания выходного сигнала функциями чувствительности второго рода (несовпадение математической модели), погрешностями вычислений на ЭВМ.

Далее осуществляем процедуру фильтрации с помощью фильтра Калмана-Бьюси, приведенную при рассмотрении алгоритма идентификации нелинейных динамических объектов класса моделей Гаммерштёйна, для оценки  $\alpha(k)$ .

### 3. Практическая реализация

Для предложенных алгоритмов идентификации моделями Гаммерштёйна и Винера создается программный продукт. Покажем эффективность алгоритма на примере объекта, описываемого моделью Гаммерштёйна, с использованием ранее разработанной программы PLVN, предназначенной для идентификации одномерных линейных динамических объектов.

С использованием PLVN выполним идентификацию нелинейного объекта. Рассматривается нелинейный объект, описываемый моделью Гаммерштёйна, со структурной схемой (рис. 5):



**Рис. 5. Пример структурной схемы нелинейной системы**

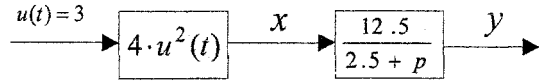
Нелинейный элемент описывается соотношением  $x(t) = 4u^2(t)$ , линейный динамический элемент задан операторной передаточной функцией при входном сигнале  $u(t) = 3$ ,

$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{5}{1 + 0,4p}. \quad (24)$$

Приведем операторную передаточную функцию (24) к виду (рис. 6):

$$W(p) = \frac{b_0}{a_0 + a_1p} = \frac{12,5}{2,5 + p}, \quad (25)$$

где коэффициент при старшей производной  $a_1 = 1$ .



**Рис. 6. Преобразованная структурная схема нелинейного объекта**

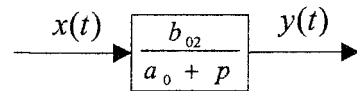
С учётом отмеченных преобразований по структурной схеме (рис. 6) выполним моделирование в программе RN и результаты представим в виде табл. 1.

**Таблица 1**  
**Результаты моделирования в программе RN**

$t, c$	$u(t)$	$x(t)$	$y(t)$
0,000	3,000	36,000	0,000
0,500	3,000	36,000	128,000
1,000	3,000	36,000	165,000
1,500	3,000	36,000	176,000
2,000	3,000	36,000	179,000
3,000	3,000	36,000	180,000
4,000	3,000	36,000	180,000
5,000	3,000	36,000	180,000

По полученным значениям входа и выхода исследуемого объекта формируем диалог для программы PLVN.

Программа PLVN предназначена для идентификации линейных динамических объектов, поэтому рассуждения были проведены согласно описанному выше алгоритму, а идентификация проводилась для объекта вида (рис. 7)



**Рис. 7. Структурная схема идентифицируемого объекта**

Согласно рисунку  $x(t) = 3^2 = 9$ . По предложенной выше методике коэффициент нелинейного элемента отнесём к числителю линейной части системы:  $b_{02} = b_0c_2 = 12,5 \cdot 4 = 50$ .

Диалог с программой имеет вид:

```

ПОРЯДОК ЧИСЛИТЕЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ
ФУНКЦИИ: 0
ПОРЯДОК ЗНАМЕНАТЕЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ
ФУНКЦИИ: 1
КОЛ-ВО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ТОЧЕК
ПЕР. ПРОЦЕССА: 101
ПРИЗНАК ПЕЧАТИ ВЕКТОРА ПАРАМЕТРОВ
1-ДА, 0- НЕТ: 1
ДИСПЕРСИЯ ШУМА ИЗМЕРЕНИЙ: .500E-01
ВЕКТОР ДИАГОНАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
КООВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ:
    
```

```

200.      200.
ВВЕДИТЕ ДЛЯ ВХОДНОГО СИГНАЛА:  777.
- СИГНАЛ ЗАВИСИТ ОТ ВРЕМЕНИ
ВЕЛИЧИНА СИГНАЛА  9.00
- СИГНАЛ ПОСТОЯННЫЙ
МАССИВ - ВРЕМЯ:
.000      .500E-01      .100      .150
4.90      4.95      5.00
МАССИВ - ВЫХОДНОЙ СИГНАЛ:
.000      21.1      39.8      56.3
...      180.      180.      180.
    
```

В результате идентификации получили значения параметров объекта:

```

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ:
ЧИСЛИТЕЛЬ   B0=  49.9592
ЗНАМЕНАТЕЛЬ A0=  2.49747
              A1=  1.00000
    
```

Значения коэффициентов объекта, идентифицируемой модели и ошибки оценивания коэффициентов представлены в табл. 2.

Таблица 2  
Коэффициенты объекта и модели

	$b_{02}$	$a_0$	$a_1$
Коэффициенты объекта	50,00000	2,50000	1,00000
Коэффициенты модели	49,95920	2,49747	1,00000
Ошибки оценивания, %	0,08160	0,10120	0,00000

Из примера видно что, определение параметров объекта, проведенное с помощью программы PLVN, подтверждает применимость метода для идентификации нелинейных динамических объектов, описываемых моделью Гаммерштейна.

### Заключение

Разработаны алгоритмы идентификации во временной области нелинейных динамических объектов, описываемых моделями Гаммерштейна и Винера. Проведена практическая реализация одного из предложенных алгоритмов, подтверждающая работоспособность и их практическую применимость.

### Литература

1. Болквядзе Г.Р. Класс моделей Гаммерштейна в задачах идентификации стохастических систем// Автоматика и телемеханика. - 2003. - № 1. - С. 42-55.
2. Устюгов М.Н., Садов В.Б. Идентификация технических объектов и систем управления во временной и частотной областях: Учебное пособие. - Челябинск: ЧГТУ, 1995. - 104 с.
3. Браммер К, Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси: Пер. с нем. - М.: Наука, 1982. - 200 с.
4. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. ЯЗ. Пыпкина. - М.: Наука, 1991. - 432 с.