УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ВРЕМЕНИ

В.И. Антипин, С.В. Попов

Краевые задачи для неклассических уравнений в частных производных, коэффициенты которых в главной части меняют знак, возникают во многих прикладных задачах, в частности, в физике, при описании процессов рассеивания и переноса, в геометрии и популяционной генетике, гидродинамике, а также многих других областях. Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для неклассических уравнений третьего порядка с меняющимся направлением времени $\operatorname{sgn} x\, u_{ttt} + u_{xx} = f(x,t)$ и $\operatorname{sgn} x\, u_t - u_{xxx} = f(x,t)$. Для рассматриваемых задач доказываются теоремы существования обобщенных решений. При доказательстве существенно используется теорема Вишика – Лакса – Мильграма и метод получения априорных оценок.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение третьего порядка с меняющимся направлением времени, обобщенные решения.

Введение

Общая теория для неклассических уравнений третьего порядка была построена в работах [1]. В настоящей работе рассматриваются две краевые задачи для неклассических уравнений третьего порядка с меняющимися направлениями времени. Основной целью данной работы будет доказательство существования обобщенных решений для уравнений третьего порядка как по временной, так и по пространственной переменным.

1. Уравнение третьего порядка по времени

Пусть Ω есть конечный интервал $(-1,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$. В области Q рассматривается уравнение третьего порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x\, u_{ttt} + u_{xx} = f(x,t). \tag{1}$$

Локальные и нелокальные краевые задачи для уравнения вида (1) рассматривались в работах [2 – 5].

Решение $u(x,t)$ уравнения (1) ищем при выполнении начальных условий

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega, \\ &u_t(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \\ &u_t(x,T) = u_T(x), \quad x \in (-1,0) \end{aligned} \tag{2}$$

и однородных краевых условий

$$u(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{3}$$

Введем обозначение $(u, v) = \int\limits_{\Omega} u\bar{v}\,dx$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Под обобщенным решением краевой задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(x,t)$ такую, что $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ и выполнено следующее интегральное тождество

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T [(u_t,\, \operatorname{sgn} x\, v_{tt}) - (u_x,\, v_x)]\,dt + \int\limits_0^1 u_0(x)v_t(x,0)\,dx + \\ + \int\limits_{-1}^0 u_T(x)v_t(x,T)\,dx = \int\limits_0^T (f(x,t), v)\,dt\end{gathered} \tag{4}$$

для любой функции $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ такой, что $v_{tt} \in L_2(Q)$ и удовлетворяющей условиям

$$v_t(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad v_t(x,0) = 0, \quad -1 < x < 0. \tag{5}$$

Обозначим через H_1 гильбертово пространство функций $v(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ таких, что $v_{tt} \in L_2(Q)$. В качестве нормы в H_1 возьмем величину

$$\|u\|_{H_1} = (\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} + \|u_{tt}\|^2_{L_2(Q)})^{1/2}.$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$, $u_0(x), u_T(x) \in L_2(\Omega)$. Тогда краевая задача (1) – (3) имеет обобщенное решение $u(x,t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.*

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$L_\varepsilon\, u \equiv -\varepsilon u^\varepsilon_{tttt} + \operatorname{sgn} x\, u^\varepsilon_{ttt} + u^\varepsilon_{xx} = f(x,t) \tag{6}$$

и такую, что для нее выполняются условия (3) и

$$u^\varepsilon(x,0) = u^\varepsilon(x,T) = 0,\ u^\varepsilon_t(x,0) = u_0(x),\ u^\varepsilon_t(x,T) = u_T(x), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

В пространстве H_1 рассмотрим вспомогательную билинейную форму

$$\begin{gathered}a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) \equiv \int\limits_0^T [\varepsilon(u^\varepsilon_{tt}, v_{tt}) - (u^\varepsilon_t,\, \operatorname{sgn} x\, v_{tt}) + (u^\varepsilon_x,\, v_x)]\,dt + \\ + \int\limits_0^1 u^\varepsilon_t(x,T)v_t(x,T)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u^\varepsilon_t(x,0)v_t(x,0)\,dx\end{gathered} \tag{8}$$

и задачу о нахождении функции $u^\varepsilon \in H_1$:

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int\limits_0^1 u_0(x)v_t(x,0)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u_T(x)v_t(x,T)\,dx - \int\limits_0^T (f(x,t), v)\,dt, \quad v \in H_1. \tag{9}$$

Из тождества (8) получим

$$|a_\varepsilon(u^\varepsilon, v)| \le c_1 \|u\|_{H_1} \|v\|_{H_1},$$

где c_1 — положительная постоянная. В равенстве (9) возьмем $v = u^\varepsilon$ и, применяя интегрирование по частям, придем к неравенству

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon) \ge \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [\varepsilon(u^\varepsilon_{tt})^2 + (u^\varepsilon_x)^2]\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 [u^\varepsilon_t(x,T)]^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 [u^\varepsilon_t(x,0)]^2\,dx, \tag{10}$$

которое можно переписать в виде

$$|a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| \geq c_2 \|u^\varepsilon\|^2_{H_1},$$

где c_2 — положительная постоянная, вообще говоря, зависящая от ε. Отсюда, из теоремы Вишика-Лакса-Мильграма (см, например, [6]) следует, что для любой функции $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$ существует единственный $u^\varepsilon \in H_1$, для которого выполняется равенство (9).

Пусть $u^\varepsilon \in H_1$ удовлетворяет тождеству (9), возьмем $v = u^\varepsilon$ и, применяя интегрирование по частям, неравенство Коши в правой части, придем к неравенству

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \int\limits_\Omega [\varepsilon (u^\varepsilon_{tt})^2 + (1-\delta)(u^\varepsilon_x)^2]\,dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} [u^\varepsilon_t(x,T)]^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} [u^\varepsilon_t(x,0)]^2\,dx \leq \\ \leq c_3(\delta)\left(\|f(x,t)\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L_2(0,1)} + \|u_T\|^2_{L_2(-1,0)} \right),\end{gathered} \tag{11}$$

где $c_3(\delta)$ — положительная постоянная, не зависящая от ε и $0<\delta<1$.

Для получения априорной оценки для u^ε_t берем в качестве функции v в равенстве (9) функцию вида $v = e^{\gamma t} u^\varepsilon$, где знак постоянной γ подберем позже.

Интегрируя по частям придем к равенству

$$\begin{gathered}\int\limits_0^T \int\limits_\Omega e^{\gamma t}[\varepsilon (u^\varepsilon_{tt})^2 - (\gamma \operatorname{sgn} x + 2\varepsilon\gamma^2)(u^\varepsilon_t)^2 + \tfrac{1}{2}(\gamma^3 \operatorname{sgn} x + \varepsilon \gamma^4)(u^\varepsilon)^2 + (u^\varepsilon_x)^2]\,dxdt + \\ + \varepsilon\gamma \int\limits_{-1}^{1} [e^{\gamma T} u_T^2(x) - u_0^2(x)]\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 [e^{\gamma T} u_T^2(x) - u_0^2(x)]\,dx - \\ - \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{0} [e^{\gamma T} u_T^2(x) - u_0^2(x)]\,dx = -\int\limits_0^T (f(x,t), e^{\gamma t} u^\varepsilon)\,dt.\end{gathered} \tag{12}$$

Считая $\gamma = \operatorname{sgn} x$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, применяя неравенство Коши в правой части, с учетом неравенства (11), окончательно придем к неравенству

$$\begin{gathered}\varepsilon \|u^\varepsilon_{tt}\|^2_{L_2(Q)} + (1-2\varepsilon)\|u^\varepsilon_t\|^2_{L_2(Q)} + \|u^\varepsilon_x\|^2_{L_2(Q)} + \\ + \frac{1}{2}(1-2\varepsilon)\left[\int\limits_0^1 u_T^2(x)\,dx + e^T \int\limits_{-1}^{0} u_0^2(x)\,dx \right] \leq \\ \leq c_4\left(\|f(x,t)\|^2_{L_2(0,T;\,W_2^{-1}(\Omega))} + \|u_0\|^2_{L_2(0,1)} + \|u_T\|^2_{L_2(-1,0)} \right),\end{gathered} \tag{13}$$

где c_4 — положительная постоянная, не зависящая от ε.

Из оценок (11), (13) следует, что существует последовательность $u_n = u^{\varepsilon_n}$, сходящаяся при $n \to \infty$ к функции $u(x,t)$, при этом функции $u_n, u_{nx}, u_{nt}, u_{ntt} \to u, u_x, u_t, u_{tt}$ слабо в $L_2(Q)$ соответственно ($u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)$), $u_{nt}(x,0) \to \tilde{u}_0 \in L_2(-1,1)$, $u_{nt}(x,T) \to \tilde{u}_T \in L_2(-1,1)$ слабо в $L_2(-1,1)$. Кроме того,

$$\left| \varepsilon \int\limits_0^T (u_{ntt}, v_{tt})\,dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon}\|u_{ntt}\|_{L_2(Q)} \cdot \sqrt{\varepsilon}\|v_{tt}\|_{L_2(Q)} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Используя эти сходимости, переходим к пределу в (9) и получаем, что (9) выполнено для предельной функции u и всех $v \in H_1$. Имеем

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-1}^{0} (u_T - u_t(x,T))v_t(x,T)\,dx + \int\limits_{0}^{1} u_t(x,T)v_t(x,T)\,dx - \\ &- \int\limits_{-1}^{0} u_t(x,0)v_t(x,0)\,dx + \int\limits_{0}^{1} (u_0 - u_t(x,0))v_t(x,0)\,dx = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Отсюда следует, что

$$u_t(x,T) = u_T(x) \in L_2(-1,0), \quad x < 0;$$

$$u_t(x,T) = 0, \quad x > 0;$$

$$u_t(x,0) = u_0(x) \in L_2(0,1), \quad x > 0;$$

$$u_t(x,0) = 0, \quad x < 0.$$

Предельное значение $u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи (1) – (3) в смысле интегрального равенства (3). Теорема 1 полностью доказана.

□

Замечание 1. Гладкость решений задачи (1)–(3) вплоть до границы не имеет места, даже если все входные данные задачи бесконечно дифференцируемы. Нахождение условий разрешимости задачи (1)–(3) в одномерном случае может быть осуществлено через фундаментальные и элементарные решения Л. Каттабрига [7].

2. Уравнение с кратными характеристиками

В области Q рассматривается уравнение третьего порядка с меняющимся направлением времени

$$\operatorname{sgn} x\, u_t - u_{xxx} = f(x,t). \tag{15}$$

Решение $u(x,t)$ уравнения (15) ищем при выполнении начальных условий

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \quad u(x,T) = u_T(x), \quad x \in (-1,0) \tag{16}$$

и однородных краевых условий

$$u(-1,t) = u_x(-1,t) = u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{17}$$

В работе [8] разрешимость поставленной краевой задачи для уравнения (15) сводится к системе сингулярных интегральных уравнений, которая в классе регулярных решений однозначно и безусловно разрешима. Отметим также работу первого автора [9].

Под обобщенным решением краевой задачи (15) – (17) понимаем функцию $u(x,t)$ такую, что $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(-1,1)), u_t \in L_2(Q)$ и выполнено следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned}&- \int\limits_{0}^{T} [(u, \operatorname{sgn} x v_t) + (u_x, v_{xx})]\,dt = \\ &= \int\limits_{0}^{T} (f(x,t)v)\,dt + \int\limits_{-1}^{0} u_T(x)\ v(x,T)dx + \int\limits_{0}^{1} u_0(x)v(x,0)dx\end{aligned} \tag{18}$$

для любой функции $v(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(-1,1))$ такой, что $v_t \in L_2(Q)$ и удовлетворяющей условиям

$$\begin{aligned}&v(-1,t) = v(1,t) = 0, \quad v_x(1,t) = 0 \\ &v(x,T) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad v(x,0) = 0, \quad -1 < x < 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Обозначим через H_2 гильбертово пространство функций $v(x,t) \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(-1,1) \cap W_2^2(-1,1))$ таких, что $v_t \in L_2(Q)$ и $v_x(1,t) = 0$. В качестве нормы в H_2 возьмем величину

$$\|u\|_{H_2} = (\|u\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(-1,1))} + \|u_t\|^2_{L_2(Q)})^{1/2}.$$

Теорема 2. *Пусть функция* $f(x,t) \in L_2(0,T; W_2^{-1}(\Omega))$, $u_0(x), u_T(x) \in L_2(\Omega)$. *Тогда краевая задача* $(15) - (17)$ *имеет обобщенное решение* $u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(-1,1))$.

Доказательство. В пространстве H_2 рассмотрим вспомогательную билинейную форму

$$\begin{gathered} a_\varepsilon(u,v) \equiv \int\limits_0^1 u(x,T)e^{\gamma(x+1)}v(x,T)\,dx + \int\limits_{-1}^0 u(x,0)v(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx - \\ - \int\limits_Q e^{\gamma(x+1)}\operatorname{sgn} x\; uv_t\,dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_t v_t\,dxdt - \\ - \int\limits_Q u_x(x,t)(e^{\gamma(x+1)}v(x,t))_{xx}\,dxdt + \varepsilon\int\limits_Q u_{xx}(x,t)v_{xx}(x,t)\,dxdt \quad (\varepsilon > 0) \end{gathered} \tag{20}$$

и задачу о нахождении функции $u^\varepsilon \in H_2$:

$$\begin{gathered} a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = \int\limits_Q e^{\gamma(x+1)}f(x,t)v(x,t)\,dxdt + \\ + \int\limits_{-1}^0 e^{\gamma(x+1)}u_T(x)\; v(x,T)\,dx + \int\limits_0^1 e^{\gamma(x+1)}u_0(x)v(x,0)\,dx \end{gathered} \tag{21}$$

для всех $v \in H_2$. Вещественный параметр γ будет выбран позже.

Докажем неравенство

$$|a_\varepsilon(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| \geq c_1\|u^\varepsilon\|^2_{H_2}. \tag{22}$$

В самом деле, вначале докажем одно вспомогательное неравенство. Выберем $\gamma < 0$ такое, что $e^{2|\gamma|} \leq 2$. Откуда имеем

$$\int\limits_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u^2\,dx \leq \int\limits_{-1}^1 u^2\,dx. \tag{23}$$

Справедливы неравенства

$$\int\limits_{-1}^1 u^2\,dx \leq 4\int\limits_{-1}^1 u_x^2\,dx \leq 8\int\limits_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u_x^2\,dx \tag{24}$$

для всех $u \in W_2^1(-1,1)$ таких, что $u(-1) = u(1) = 0$. Действительно, первое неравенство доказывается интегрированием по частям. Имеем

$$\int_{-1}^1 u^2\,dx = u^2x|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2uu_x x dx,$$

откуда с учетом неравенства $uu_x \leq (1/4)u^2 + u_x^2$ при $|x| \leq 1$, получим

$$\int_{-1}^1 u^2\,dx \leq 2\int_{-1}^1 |uu_x|\,|x| dx \leq (1/2)\int_{-1}^1 u^2 dx + 2\int_{-1}^1 u_x^2 dx.$$

Используя (24), из неравенства (23) получим

$$\int_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u^2\,dx \leq 8\int_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u_x^2\,dx, \tag{25}$$

что и требовалось.

Далее, рассмотрим интеграл

$$I = -\int\limits_Q u_x(e^{\gamma(x+1)}u)_{xx}\,dxdt, \quad u \in H_2. \tag{26}$$

Интегрируя (26) по частям, получим, что

$$I = -\frac{\gamma}{2}\int_Q (3u_x^2 - \gamma^2 u^2)e^{\gamma(x+1)}\,dQ.$$

Используя неравенство (25), получим, что

$$I \geq -\frac{\gamma}{2}\int_Q u_x^2(3 - 8\gamma^2)e^{\gamma(x+1)}\,dQ.$$

Выбирая теперь $\gamma < 0$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$(3 - 8\gamma^2) \geq 1, \quad e^{2\gamma} \leq 2, \tag{27}$$

что возможно при малых отрицательных γ, получим неравенство

$$I \geq -\frac{\gamma}{2}\int_Q u_x^2 e^{\gamma(x+1)}\,dQ,$$

которое в силу (25) также можно переписать в виде

$$I \geq -\frac{\gamma}{16}\int_Q (u_x^2 + u^2)e^{\gamma(x+1)}\,dQ, \quad u \in H_2. \tag{28}$$

Далее считаем, что параметр γ зафиксирован и удовлетворяет неравенствам (26). Возьмем в (21) $v = u^\varepsilon$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{gathered}
\int\limits_Q e^{\gamma(x+1)}\,\operatorname{sgn} x\, u^\varepsilon u_t^\varepsilon\,dxdt = (1/2)\int\limits_{-1}^{1} e^{\gamma(x+1)}\,\operatorname{sgn} x\,(u^\varepsilon)^2|_0^T\,dx = \\
= (1/2)\int\limits_{-1}^{1} e^{\gamma(x+1)}\,\operatorname{sgn} x\,((u^\varepsilon)^2(x,T) - (u^\varepsilon)^2(x,0))\,dx = \\
= (1/2)\int\limits_{0}^{1} e^{\gamma(x+1)}\,((u^\varepsilon)^2(x,T) - (u^\varepsilon)^2(x,0))\,dx - \\
-(1/2)\int\limits_{-1}^{0} e^{\gamma(x+1)}\,((u^\varepsilon)^2(x,T) - (u^\varepsilon)^2(x,0))\,dx,
\end{gathered} \tag{29}$$

используя (28), имеем

$$
\begin{gathered}
\int_0^1 (u^\varepsilon)^2(x,T)e^{\gamma(x+1)}\,dx + \int_{-1}^0 (u^\varepsilon)^2(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx - \int_Q e^{\gamma(x+1)}\ \operatorname{sgn} x\ u^\varepsilon u_t^\varepsilon\,dxdt+ \\
+\varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_t^2\,dxdt - \int_Q u_x^\varepsilon(e^{\gamma(x+1)}u^\varepsilon)_{xx}\,dxdt + \varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_{xx}^2\,dxdt \geq \\
\geq \int_0^1 (u^\varepsilon)^2(x,T)e^{\gamma(x+1)}\,dx + \int_{-1}^0 (u^\varepsilon)^2(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx- \\
-(1/2)\int_0^1 e^{\gamma(x+1)}\left((u^\varepsilon)^2(x,T)-(u^\varepsilon)^2(x,0)\right)dx+ \\
+(1/2)\int_{-1}^0 e^{\gamma(x+1)}\left((u^\varepsilon)^2(x,T)-(u^\varepsilon)^2(x,0)\right)dx+ \\
+\varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_t^2\,dxdt - \int_Q u_x^\varepsilon(e^{\gamma(x+1)}u^\varepsilon)_{xx}\,dxdt- \\
-(\gamma/16)\int_Q ((u^\varepsilon)_x^2+(u^\varepsilon)^2)e^{\gamma(x+1)}\,dxdt + \varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_{xx}^2\,dxdt = \\
= (1/2)\int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,T)e^{\gamma(x+1)}\,dx + (1/2)\int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx+ \\
+\varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_t^2\,dxdt - (\gamma/16)\int_Q ((u^\varepsilon)_x^2+(u^\varepsilon)^2)e^{\gamma(x+1)}\,dxdt + \varepsilon\int_Q (u^\varepsilon)_{xx}^2\,dxdt,
\end{gathered}
\tag{30}
$$

окончательно получим неравенство

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,T)e^{\gamma(x+1)}dx + \int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx+ \\
+\varepsilon\int_Q ((u_t^\varepsilon)^2+(u_{xx}^\varepsilon)^2)\,dxdt + \int_Q((u_x^\varepsilon)^2+(u^\varepsilon)^2)e^{\gamma(x+1)}\,dQ \leq \\
\leq c(|\int_Q e^{\gamma(x+1)}f(x,t)v(x,t)\,dxdt + \int_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u_T(x)\ v(x,T)dx+ \\
\int_{-1}^1 e^{\gamma(x+1)}u_0(x)v(x,0)dx|) = c|a(u^\varepsilon,u^\varepsilon)|,
\end{gathered}
\tag{31}
$$

где c – некоторая положительная постоянная.

Используя неравенство Коши с малым параметром в правой части, получим

$$
\begin{gathered}
\int_Q e^{\gamma(x+1)}f(x,t)v(x,t)\,dxdt + \int_{-1}^0 e^{\gamma(x+1)}u_T(x)\ v(x,T)dx + \int_0^1 e^{\gamma(x+1)}u_0(x)v(x,0)dx \leq \\
\leq \varepsilon_1\int_Q e^{\gamma(x+1)}(u^\varepsilon(x,t))^2\,dxdt + C_{\varepsilon_1}\int_Q (f(x,t))^2\,dxdt+ \\
+\varepsilon_2\int_{-1}^0 e^{\gamma(x+1)}(u^\varepsilon(x,T))^2\,dxdt + C_{\varepsilon_2}\int_{-1}^0 (u_T(x,t))^2\,dxdt+ \\
+\varepsilon_3\int_0^1 e^{\gamma(x+1)}(u^\varepsilon(x,0))^2\,dxdt + C_{\varepsilon_3}\int_0^1 (u_0(x))^2\,dxdt.
\end{gathered}
\tag{32}
$$

Тогда из (31) получим

$$
\begin{gathered}
\int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,T)e^{\gamma(x+1)}dx + \int_{-1}^1 (u^\varepsilon)^2(x,0)e^{\gamma(x+1)}\,dx+ \\
+\varepsilon\int_Q ((u_t^\varepsilon)^2+(u_{xx}^\varepsilon)^2)\,dxdt + \int_Q((u_x^\varepsilon)^2+(u^\varepsilon)^2)e^{\gamma(x+1)}\,dQ \leq \\
\leq c_1(\|f(x,t)\|^2_{L_2(0,T;W_2^{-1}(-1,1))} + \|u_T\|^2_{L_2(-1,0)} + \ \|u_0\|^2_{L_2(0,1)}),
\end{gathered}
\tag{33}
$$

где постоянная c_1 не зависит от ε. В частности, из (31) получим

$$|a(u^\varepsilon, u^\varepsilon)| \geq \delta_0 \|u^\varepsilon\|^2_{H_2}, \qquad (34)$$

где постоянная δ_0, вообще говоря, зависит от параметра ε. Эта оценка и теорема Вишика-Лакса-Мильграма [6] гарантируют существование функции u^ε такой, что выполнено (21) для всех $v \in H_2$. Функция u^ε удовлетворяет априорной оценке (33).

Из оценки (33) вытекает, что найдется подпоследовательность $u_k = u^{\varepsilon_k}$ такая, что $u_k, u_{kx} \to u, u_x$ слабо в $L_2(Q)$ соответственно ($u \in L_2(0,T; \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega))$, $u_k(x,0) \to \tilde{u}_0 \in L_2(-1,1)$, $u_k(x,T) \to \tilde{u}_T \in L_2(-1,1)$ слабо в $L_2(-1,1)$. Кроме того,

$$\left| \varepsilon \int\limits_0^T (u_{kxx}, v_{xx})\, dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|u_{kxx}\|_{L_2(Q)} \cdot \sqrt{\varepsilon} \|v_{xx}\|_{L_2(Q)} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$,

$$\left| \varepsilon \int\limits_0^T (u_t, v_t)\, dt \right| \leq \sqrt{\varepsilon} \|u_{kt}\|_{L_2(Q)} \cdot \sqrt{\varepsilon} \|v_t\|_{L_2(Q)} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Используя эти сходимости, переходим к пределу в (21) и получаем, что (21) выполнено для предельной функции u и всех $v \in H_2$. Далее получим

$$\begin{gathered} \int\limits_{-1}^{0} e^{\gamma(x+1)} (u_T - u(x,T)) v(x,T)\, dx + \int\limits_0^1 e^{\gamma(x+1)} u(x,T) v(x,T)\, dx - \\ - \int\limits_{-1}^{0} e^{\gamma(x+1)} u(x,0) v(x,0)\, dx + \int\limits_0^1 e^{\gamma(x+1)} (u_0 - u(x,0))\, dx = 0. \end{gathered} \qquad (35)$$

Отсюда следует, что

$$u(x,T) = u_T(x) \in L_2(-1,0), \quad x < 0;$$

$$u(x,T) = 0, \quad x > 0;$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in L_2(0,1), \quad x > 0;$$

$$u(x,0) = 0, \quad x < 0.$$

Предельное значение $u(x,t)$ является обобщенным решением краевой задачи (15) – (17) в смысле интегрального равенства (18). Теорема 2 доказана. □

Замечание 2. Гладкость решений задачи (15)–(17) вплоть до границы также не имеет места, даже если все входные данные задачи бесконечно дифференцируемы. Определение условий разрешимости задачи (15)–(17) может быть осуществлено через фундаментальные и элементарные решения Л. Каттабрига [10].

Работа проводилась при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания на выполнение НИР на 2012–2014 гг. (проект №4402, 5562) и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (ГК 02.740.11.0609) и соглашения №14.132.21.1350.

Литература

1. Кожанов, А.И. К теории уравнений составного типа: дис. ...д-ра физ.-мат. наук / А.И. Кожанов. – Новосибирск, 1993. – 334 с.
2. Кислов, Н.В. Краевые задачи для уравнения смешанного типа в прямоугольной области / Н.В. Кислов // Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 255, № 1. – С. 26–30.
3. Пятков, С.Г. Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения / С.Г. Пятков // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики: сб. науч. тр. АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики. – Новосибирск, 1986. – С. 65–84.
4. Егоров, И.Е. Неклассические уравнения математической физики высокого порядка / И.Е. Егоров, В.Е. Федоров. – Новосибирск : Изд-во ВЦ СО РАН, 1995. – 133 с.
5. Егоров, И.Е. Неклассические дифференциально-операторные уравнения / И.Е. Егоров, С.Г. Пятков, С.В. Попов. – Новосибирск : Наука, 2000. – 336 с.
6. Егоров, Ю.В. Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы / Ю.В. Егоров. – М.: МГУ, 1985. – 166 с.
7. Cattabriga, L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple / L. Cattabriga // Rendiconti del seminario matimatico della Univ. di Padova. – 1961. – V. 31. – P. 1–45.
8. Джураев, Т.Д. Краевые задачи для уравнения смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Изд-во ФАН, 1979. – 239 с.
9. Антипин, В.И. Разрешимость краевой задачи для уравнения третьего порядка с меняющимся направлением времени / В.И. Антипин // Мат. заметки ЯГУ. – 1980. – Т. 18, № 1. – С. 8–15.
10. Cattabriga, L. Un Problema al cjntorno per una equazione parabolica di ordine dispari / L. Cattabriga // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa. – 1959. – V. 13, № 2. – P. 163–203.

Василий Иванович Антипин, старший преподаватель, кафедра математического анализа, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова (г. Якутск, Российская Федерация), antvasiv@mail.ru.

Сергей Вячеславович Попов, доктор физико-математических наук, профессор, кафедра математического анализа, Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова (г. Якутск, Российская Федерация), madu@ysu.ru.

MSC 35D30

Boundary Problems for a Third-Order Equations with Changing Time Direction

V.I. Antipin, North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov (Yakutsk, Russian Federation)***,***
S.V. Popov, North-Eastern Federal University named after M.K. Ammosov (Yakutsk, Russian Federation)

Boundary problems for nonclassical partial differential equations, coefficients in the main part of the sign change that occurs during many applications, particularly in physics, the description processes of diffusion and transfer, in geometry and population genetics, fluid dynamics, as well as many other areas. The work is devoted to research solvability of boundary value problems for nonclassical equations of the third order $\operatorname{sgn} x\, u_{ttt} + u_{xx} = f(x,t)$, $\operatorname{sgn} x\, u_t - u_{xxx} = f(x,t)$ with changing direction time. For these problems, we prove theorems the existence and uniqueness of generalized solutions. The proof makes essential use Theorem Vishik-Lax-Milgram and the method of obtaining a priori estimates.

Keywords: the boundary value problem, the equation of third order with a changing time direction, the generalized solutions.

References

1. Kozhanov A.I. *The Theory Equations of Composite Type: Thesis of Doctor of Physical and Mathematical Sciences* [K teorii uravnenij sostavnogo tipa: dis. ... d-ra fiz.-mat. nauk]. Novosibirsk, 1993. 334 p.
2. Kislov N.V. Boundary Value Problems for Equations of Mixed Type in a Rectangular Region [Kraevye zadachi dlja uravnenija smeshannogo tipa v prjamougol'noj oblasti]. *Dokl. AN SSSR* [Reports of the Academy of Sciences of the USSR], 1980, vol. 255, no. 1, pp. 26–30.
3. Pjatkov S.G. Properties of the Functions of a Spectral Problem and Their Applications [Svojstva sobstvennyh funkcij odnoj spektral'noj zadachi i nekotorye ih prilozhenija]. *Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the USSR* [AN SSSR. Sib. otd-nie. In-t matematiki], Novosibirsk, 1986, pp. 65–84.
4. Egorov I.E., Fedorov V.E. *Nonclassical Equations of Mathematical Physics of High-Order* [Neklassicheskie uravnenija matematicheskoj fiziki vysokogo porjadka]. Novosibirsk, VC SO RAN, 1995. 133 p.
5. Egorov I.E., Pjatkov S.G., Popov S.V. *Nonclassical Differential-Operator Equations* [Neklassicheskie differencial'no-operatornye uravnenija]. Novosibirsk, Nauka, 2000. 336 p.
6. Egorov Ju.V. *Lectures on Partial Differential Equations. Additional Chapters* [Lekcii po uravnenijam s chastnymi proizvodnymi. Dopolnitel'nye glavy]. Moscow, MGU, 1985. 166 p.
7. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple. *Rendiconti del seminario matimatico della Univ. di Padova,* 1961, vol. 31, pp. 1–45.
8. Dzhuraev T.D. *Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite type* [Kraevye zadachi dlja uravnenija smeshannogo i smeshanno-sostavnogo tipov]. Tashkent, FAN, 1979. 239 p.
9. Antipin V.I. Solvability of Boundary Value Problems for the Third Order with Changing Time Direction [Razreshimost' kraevoj zadachi dlja uravnenija tret'ego porjadka s menjajuwimsja napravleniem vremeni]. *Matematicheskie zametki JaGU* [Mathematical Notes YSU], 2011, vol. 18, no. 1, pp. 8–15.
10. Cattabriga L. Un Problema al cjntorno per una equazione parabolica di ordine dispari. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 1959, vol. 13, no. 2, pp. 163–203.

Поступила в редакцию 17 июля 2012 г.