УДК 519.6

ОДНА ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ БЕЛЛМАНА В ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧЕ КУРЬЕРА С ВНУТРЕННИМИ РАБОТАМИ

А.Г. Ченцов

Рассматривается одна конструкция параллельной реализации метода динамического программирования для решения задачи последовательного обхода множеств (мегаполисов) с ограничениями в виде условий предшествования, именуемая обобщенной задачей курьера; предполагается, что на множествах должны выполняться работы, сопровождаемые затратами. Исследуется вычислительная процедура, предусматривающая частичное построение массива значений функции Беллмана и реализуемая на системе слоев пространства позиций. В основе конструкции находится модель дискретной динамической системы, для которой конструируются области достижимости, реализуемые по рекуррентной схеме.

Ключевые слова: маршрут, мегаполис, динамическое программирование.

Введение

Статья продолжает исследования [1, 2, 3, 4, 5, 6] и посвящена разработке одной гипотетической параллельной процедуры построения функции Беллмана с распределением памяти между процессорами. В [1, 2, 3, 4, 5] детально изложена одна нетрадиционная версия метода динамического программирования (МДП) для решения обобщенной задачи курьера с внутренними работами и аддитивной функцией агрегирования затрат (имеется в виду задача последовательного обхода множеств, осложненная условиями предшествования и необходимостью выполнения работ на этих множествах). Принципиальной особенностью версии является то, что здесь не предусматривается построение всего массива значений функции Беллмана, что существенно с точки зрения вычислений. Тем не менее построение даже «усеченной» функции Беллмана представляет серьезную проблему. Поэтому естественны попытки построения параллельных алгоритмов для насчитывания массива значений упомянутой функции с последующей их реализацией на многопроцессорных вычислительных системах (МВС). Представляется полезным обеспечение независимой работы процессоров вплоть до последнего этапа, когда вычислитель, получив данные от процессоров, задействованных в построении функции Беллмана, реализует финальное вычисление значения задачи (глобального экстремума); тем самым удалось бы реализовать некоторый аналог персептрона. В настоящей статье рассматривается одна гипотетическая конструкция такого рода. В основе процедуры находится схема, использующая вспомогательные дискретные динамические системы. Фазовым пространством упомянутых систем является множество списков заданий, обладающих свойством, связанным с условиями предшествования. Для таких динамических систем естественным образом возникают области достижимости, которые только и являются существенными для реализации параллельной процедуры; для построения упомянутых областей применяется рекуррентная процедура, определяемая фактически в терминах полугруппового свойства вышеупомянутых систем.

Отметим, что прототипом рассматриваемой ниже задачи маршрутизации является известная задача коммивояжера (ЗК) [7, 8, 9], традиционно считающаяся труднорешаемой (см. [10]). В связи с построением МДП для решения ЗК отметим оригинальные работы [11, 12].

Заметим, что в [7, 8, 9] обсуждаются различные задачи, включающие элементы маршрутизации, но отличающиеся от ЗК наличием тех или иных дополнительных условий, связанных с приложениями. Так, в частности, в различных инженерных задачах возникают уже упоминавшиеся условия предшествования. Как показано в [1, 2, 3, 4, 5, 6], эти условия удается использовать для целей снижения вычислительной сложности, т.е. данные ограничения могут в рамках соответствующей конструкции не затруднять, а, напротив, облегчать решение задачи. Это обстоятельство используется в настоящей работе (в частности, это проявляется в конструкции распараллеливания, излагаемой далее).

Говоря о возможных приложениях, отметим задачи атомной энергетики, для которых в последнее время удалось применить разрабатываемые в [1, 2, 3, 4, 5, 6] теоретические методы. Речь идет о снижении облучаемости персонала АЭС при выполнении комплекса работ в условиях повышенной радиации. В этой связи отметим работы [13, 14].

1. Обозначения и определения общего характера

Рассмотрим краткую сводку используемых понятий, согласующихся в основном с [1, 2, 3, 4, 5]. Используем кванторы и пропозициональные связки для сокращения словесных высказываний; в дальнейшем def заменяет фразу «по определению», $\triangleq$ — равенство по определению, $\varnothing$ — пустое множество. Семейством называем множество, все элементы которого — множества (используемые ниже множества, как правило, конечны).

Для произвольных объектов x и y через $\{x; y\}$ обозначаем (неупорядоченную) пару [15] этих объектов, т.е. множество, содержащее x, y и не содержащее никаких других элементов. Если z — объект, то $\{z\} \triangleq \{z; z\}$ есть одноэлементное множество, содержащее z. Следуя [15], полагаем для любых двух объектов α и β, что $(\alpha, \beta) \triangleq \{\{\alpha\}; \{\alpha; \beta\}\}$, получая упорядоченную пару с первым элементом α и вторым элементом β. Если h — какая-либо упорядоченная пара, то через $\mathrm{pr}_1(h)$ и $\mathrm{pr}_2(h)$ обозначаем соответственно первый и второй элементы упорядоченной пары h, однозначно определяемые условием $h = (\mathrm{pr}_1(h), \mathrm{pr}_2(h))$.

Если H — множество, то через $\mathcal{P}(H)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) H, тогда $\mathcal{P}'(H) \triangleq \mathcal{P}(H) \setminus \{\varnothing\}$ — семейство всех непустых п/м H. Через $\mathbb{R}$ обозначаем вещественную прямую с неотрицательной полуосью $[0, \infty[\triangleq \{\xi \in \mathbb{R} \mid 0 \leq \xi\}$, $\mathbb{N} \triangleq \{1; 2; ...\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$ — натуральный ряд и $\mathbb{N}_0 \triangleq \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0; 1; 2; ...\}$; $\overline{k, l} \triangleq \{i \in \mathbb{N}_0 \mid (k \leq i) \& (i \leq l)\}$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$ $\forall l \in \mathbb{N}_0$ (при $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \mathbb{N}$ непременно $\overline{k, l} \subset \mathbb{N}$).

Если S — множество, то через $\mathrm{Fin}(S)$ обозначаем семейство всех непустых конечных п/м S; если $K \in \mathrm{Fin}(S)$, то через $|K|$ обозначаем мощность (количество элементов) K, $|K| \in \mathbb{N}$; полагаем также, что $|\varnothing| \triangleq 0$.

Перестановкой непустого множества T называем [16, с. 87] всякую биекцию [16, с. 86] T на себя; если α — перестановка T, то α^{-1} есть def перестановка, обратная к α : α^{-1} — перестановка T, $\alpha(\alpha^{-1}(t)) = \alpha^{-1}(\alpha(t)) = t$ $\forall t \in T$. Если K — непустое конечное множество, то через $(\mathrm{bi})[K]$ обозначаем (непустое) множество всех биекций множества $\overline{1, |K|}$ на K.

Для каждого непустого множества $\mathbb{T}$ через $\mathcal{R}_+[\mathbb{T}]$ условимся обозначать множество всех неотрицательных вещественнозначных функций на $\mathbb{T}$, т.е. $\mathcal{R}_+[\mathbb{T}] = \{\mathbb{T} \longrightarrow [0, \infty[\}$; если при этом $\mathbb{T} = A \times B$, где A и B — непустые множества, то $f(a, b) \triangleq f((a, b))$ $\forall f \in \mathcal{R}_+[\mathbb{T}]$ $\forall a \in A$ $\forall b \in B$ (обычное правило экономии скобок).

В дальнейшем широко используется индексная форма записи функций, принятая в [17]: если X и Y — непустые множества и каждому $u \in X$ сопоставлен (единственный) элемент $y_u \in Y$, то $(y_x)_{x \in X}$ понимается как функция $f: X \longrightarrow Y$, для которой $f(x) = y_x$ $\forall x \in X$.

Данную форму записи используем, в частности, при $X = \overline{1,m}$, где $m \in \mathbb{N}$. Кортежи

$$(y_i)_{i \in \overline{1,m}} : \ \overline{1,m} \longrightarrow Y \tag{1}$$

являются, строго говоря, функциями, действующими из $\overline{1,m}$ в Y; обозначая кортеж (1) одной буквой $\mathbf{y}$, получаем функцию (из $\overline{1,m}$ в Y), для которой $\mathbf{y}(j) = y_j \ \ \forall j \in \overline{1,m}$. Соглашение, подобное этому, используется также при $X = \overline{0,m}$, где $m \in \mathbb{N}$.

2. Постановка задачи

Всюду в дальнейшем фиксируем $N \in \mathbb{N}$ такое, что $2 \leq N$ (существенная часть изложения будет касаться, однако, случая $3 \leq N$); N определяет число (целевых) множеств — мегаполисов, подлежащих посещению. Через $\mathbb{P}$ обозначаем множество всех перестановок множества $\overline{1,N} : \mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Элементы $\mathbb{P}$ называем (полными) маршрутами. Выбор маршрута из множества $\mathbb{P}$ может быть стеснен условиями предшествования, определяемыми заданным множеством $\mathbf{K} \in \mathcal{P}(\overline{1,N} \times \overline{1,N})$ (случай $\mathbf{K} = \varnothing$ не исключается и отвечает отсутствию условий предшествования) адресных пар, первые элементы которых именуем отправителями, а вторые — получателями. Тогда $\mathbb{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in \mathbb{P} \mid \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_1(z)) < \alpha^{-1}(\mathrm{pr}_2(z)) \ \ \forall z \in \mathbf{K}\}$ есть (см.[4], [6, §4.9]) множество всех маршрутов, допустимых по предшествованию, т.е. реализующих для каждой адресной пары посещение ее отправителя ранее, чем посещение получателя. Всюду в дальнейшем полагаем выполненным

Условие 21. *Для всякого множества* $\mathbf{K}_0 \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$ *существует такая адресная пара* $z \in \mathbf{K}_0$, *что* $\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(\tilde{z}) \ \ \forall \tilde{z} \in \mathbf{K}_0$.

Подробное обсуждение данного естественного условия см. в [6, разделы 2.2, 2.5]. Мы, как уже отмечалось, принимаем это условие. Тогда [6, раздел 2.2] $\mathbb{A} \neq \varnothing$.

Фиксируем непустое множество X, точку $x^0 \in X$ и кортеж $(M_i)_{i \in \overline{1,N}} : \ \overline{1,N} \longrightarrow \mathrm{Fin}(X)$ множеств (мегаполисов), относительно которых предполагается, что $(x^0 \notin M_j \quad \forall j \in \overline{1,N})$ & $(\ M_{i_1} \cap M_{i_2} = \varnothing \quad \forall i_1 \in \overline{1,N} \ \forall i_2 \in \overline{1,N} \setminus \{i_1\})$. Точка x^0 исполняет роль базы (начального пункта), а множества $M_1, ...M_N$ должны посещаться в той или иной очередности. Каждое такое посещение характеризуется пунктом прибытия и пунктом отправления, а вся система перемещений по множествам в очередности $\alpha \in \mathbb{P}$ имеет вид

$$x^0 \longrightarrow (z_1 \in M_{\alpha(1)} \times M_{\alpha(1)}) \longrightarrow ... \longrightarrow (z_N \in M_{\alpha(N)} \times M_{\alpha(N)}) \tag{2}$$

(при $k \in \overline{1,N} \ \ \mathrm{pr}_1(z_k) \in M_{\alpha(k)}$ есть пункт прибытия на $M_{\alpha(k)}$, а $\mathrm{pr}_2(z_k) \in M_{\alpha(k)}$ — пункт отправления; возможное несовпадение этих пунктов связано с выполнением работ на $M_{\alpha(k)}$). Условия предшествования обязывают к тому, чтобы в (2) $\alpha \in \mathbb{A}$.

Через $\mathfrak{X}$ условимся обозначать множество всех кортежей $(z_i)_{i \in \overline{0,N}} : \ \overline{0,N} \longrightarrow X \times X$. Ориентируясь на (2), полагаем, что

$$\mathfrak{Z}[\alpha] \stackrel{\triangle}{=} \{(z_i)_{i \in \overline{0,N}} \in \mathfrak{X} \mid (z_0 = (x^0, x^0)) \ \& \ (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)} \ \ \forall j \in \overline{1,N})\} \ \ \forall \alpha \in \mathbb{P}. \tag{3}$$

Тем самым маршруту сопоставляется непустое конечное множество всех согласующихся с ним в смысле (2) трасс посещения мегаполисов $M_1, ..., M_N$. Полагаем, что при осуществлении (2) могут выбираться любой маршрут $\alpha \in \mathbb{A}$ и любая трасса из множества (3). Последствия данного выбора оцениваются с помощью аддитивного критерия.

Полагаем заданными функции $\mathbf{c} \in \mathcal{R}_+[X \times X]$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{R}_+[X]$, а также кортеж функций $(c_i)_{i \in \overline{1,N}} : \ \overline{1,N} \longrightarrow \mathcal{R}_+[X \times X]$. Посредством $\mathbf{c}$ будут оцениваться затраты на (внешние) перемещения между множествами, посредством $c_1, ..., c_N$ — работы на множествах, а посредством $\mathbf{f}$ — финальное состояние (в случае (2) посредством $\mathbf{f}$ оценивается $\mathrm{pr}_2(z_N)$);

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \stackrel{\triangle}{=} \sum_{i=0}^{N-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{N} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_N)) \quad \forall \alpha \in \mathbb{A}\ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]. \tag{4}$$

В качестве основной рассматриваем далее следующую задачу:

$$\mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \longrightarrow \min,\ \alpha \in \mathbb{A},\ (z_i)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha]. \tag{5}$$

Через V обозначаем далее значение (экстремум) задачи (5), т.е.

$$V \stackrel{\triangle}{=} \min_{\alpha\in\mathbb{A}} \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,N}}\in\mathfrak{Z}[\alpha]} \mathfrak{C}_\alpha[(z_i)_{i\in\overline{0,N}}] \in [0, \infty[. \tag{6}$$

Если $\alpha^0 \in \mathbb{A}$ и $(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}} \in \mathfrak{Z}[\alpha^0]$ реализуют равенство $\mathfrak{C}_{\alpha^0}[(z_i^0)_{i\in\overline{0,N}}] = V$, то $(\alpha^0, (z_i^0)_{i\in\overline{0,N}})$ есть оптимальное решение задачи (5), т.е. решение, доставляющее экстремум (6).

3. Метод динамического программирования: слои функции Беллмана

В настоящем разделе кратко излагается усеченная версия МДП (подробнее см. в [1, 2, 3, 4]). Прежде всего напомним, что построение нужного варианта МДП для решения задачи (5) было связано (в [1, 2, 3, 4]) с предварительным преобразованием системы ограничений, в результате чего допустимость по предшествованию была заменена допустимостью по вычеркиванию. Опуская данное рассуждение [1, 2, 3, 4], введем нужные для дальнейшего конструкции, связанные с вычеркиванием заданий из списков; списками именуем непустые п/м $\overline{1,N}$. Итак, $\mathfrak{N} \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}'(\overline{1,N})$ есть множество всевозможных списков, каждый из которых есть конечное множество, а потому определена соответствующая мощность, принимающая значение в $\overline{1,N}$. Пусть $\mathfrak{N}_s \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N} \mid s = |K|\}\ \ \forall s \in \overline{1,N}$; в виде $\mathfrak{N}_s,\ s \in \overline{1,N}$, получаем разбиение $\mathfrak{N}$ в систему непустых семейств непустых п/м $\overline{1,N}$. Следуя [1, 2, 3, 4, 5, 6], полагаем, что

$$\Xi[K] \stackrel{\triangle}{=} \{l \in \mathbf{K} \mid (\mathrm{pr}_1(l) \in K)\ \&\ (\mathrm{pr}_2(l) \in K)\}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{7}$$

В (7) введены множества адресных пар, «полностью» укладывающихся в тот или иной список. Правило вычеркивания определяем [1, 2, 3, 4, 6] посредством отображения $\mathbf{I}$, действующего в $\mathfrak{N}$ (т.е. $\mathbf{I} :\ \mathfrak{N} \longrightarrow \mathfrak{N}$) и такого, что

$$\mathbf{I}(K) \stackrel{\triangle}{=} K \setminus \{\ \mathrm{pr}_2(l) :\ l \in \Xi[K]\}\ \ \forall K \in \mathfrak{N}. \tag{8}$$

На основе $\mathbf{I}$ (8) в [1, 2, 3, 4, 6] определяется допустимость маршрутов по вычеркиванию.

Если $K \in \mathfrak{N}$, то полагаем, что $(\mathrm{bi})[K]$ есть def множество всех биекций «отрезка» $\overline{1, |K|}$ на множество K; $(\mathrm{bi})[K] \neq \varnothing$. Такие биекции рассматриваем как частичные (вообще говоря) маршруты. Имеем равенство $\mathbb{P} = (\mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Далее, следуя [6, часть 2], введем укороченные аналоги маршрутов из $\mathbb{A}$, полагая при $K \in \mathfrak{N}$, что

$$(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \stackrel{\triangle}{=} \{\alpha \in (\mathrm{bi})[K] \mid \alpha(s) \in \mathbf{I}(\{\alpha(j) :\ j \in \overline{s, |K|}\})\ \ \forall s \in \overline{1, |K|}\}.$$

Тогда [6, часть 2] $(\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K] \neq \varnothing\ \ \forall K \in \mathfrak{N}$; кроме того, $\mathbb{A} = (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[\overline{1,N}]$. Итак, при $K \in \mathfrak{N}$ мы в виде $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$ имеем аналоги допустимых маршрутов из множества $\mathbb{A}$; правда, в этой аналогии понятие допустимости связывается с правилом вычеркивания на основе $\mathbf{I}$. Наряду с «частичными» маршрутами потребуются также «частичные» трассы.

Условимся о соглашении: если $K \in \mathfrak{N}$, то через $\mathbb{X}_K$ обозначаем множество всех кортежей $(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} : \overline{0,|K|} \longrightarrow X \times X$. Определяем теперь частичные трассы в виде упомянутых кортежей со специальными свойствами: если $x \in X$, $K \in \mathfrak{N}$ и $\alpha \in (\mathrm{bi})[K]$, то в виде $\mathfrak{Z}(x,K,\alpha) \triangleq \{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}_K \mid (z_0 = (x,x))\ \&\ (z_j \in M_{\alpha(j)} \times M_{\alpha(j)}\ \ \forall j \in \overline{1,|K|})\}$ имеем требуемое непустое конечное множество «частичных» трасс, стартующих из x и согласованных с α; для дальнейшего важен случай $\alpha \in (\mathbf{I} - \mathrm{bi})[K]$. Полагаем теперь, что

$$\mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}) \triangleq \sum_{i=0}^{|K|-1} \mathbf{c}(\mathrm{pr}_2(z_i), \mathrm{pr}_1(z_{i+1})) + \sum_{i=1}^{|K|} c_{\alpha(i)}(z_i) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z_{|K|}))$$
$$\forall K \in \mathfrak{N}\ \forall \alpha \in (\mathrm{bi})[K]\ \forall (z_i)_{i\in\overline{0,|K|}} \in \mathbb{X}_{|K|}.$$

С учетом данного определения получаем теперь, что

$$v(x,K) \triangleq \min_{\alpha\in(\mathbf{I}-\mathrm{bi})[K]}\ \min_{(z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}\in\mathfrak{Z}(x,K,\alpha)} \mathfrak{C}_K^{(\alpha)}((z_i)_{i\in\overline{0,|K|}}) \in [0,\infty[\ \ \forall x \in X\ \forall K \in \mathfrak{N}.$$

Тогда $V = v(x^0, \overline{1,N})$. Напомним подход [1, 2, 3, 4, 5, 6]: полагаем, что

$$\mathcal{G} \triangleq \{K \in \mathfrak{N} \mid \forall z \in \mathbf{K}\quad (\mathrm{pr}_1(z) \notin K)\ \vee\ (\mathrm{pr}_2(z) \in K)\}. \tag{9}$$

Множества из $\mathcal{G}$ называем существенными списками; ранжируем их по мощности:

$$\mathcal{G}_s \triangleq \mathcal{G} \cap \mathfrak{N}_s\ \ \forall s \in \overline{1,N}. \tag{10}$$

Из (9), (10) легко извлекается представление $\mathcal{G}_1$ в терминах $\mathbf{K}_1 \triangleq \{\ \mathrm{pr}_1(z) :\ z \in \mathbf{K}\}$:

$$\mathcal{G}_1 = \{\{t\} :\ t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1\}. \tag{11}$$

С другой стороны (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6]), имеет место свойство

$$K \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{s-1}\ \ \forall s \in \overline{2,N}\ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \forall k \in \mathbf{I}(K), \tag{12}$$

связывающее систему (10) с операцией вычеркивания. Далее мы дополним свойство (11), (12), но сейчас, имея в виду логику МДП, напомним конструкцию слоев пространства позиций; позициями мы именуем пары (x,K), $x \in X$, $K \in \mathbf{N}$, где (здесь и ниже) $\mathbf{N} \triangleq \mathfrak{N} \cup \{\varnothing\} = \mathcal{P}(\overline{1,N})$ — семейство всех п/м $\overline{1,N}$. Введем $\mathbf{M} \triangleq \bigcup_{i\in\overline{1,N}\setminus\mathbf{K}_1} M_i$, получая непустое [6, § 4.9] конечное п/м X, а также слой

$$D_0 \triangleq \{(x,\varnothing) :\ x \in \mathbf{M}\} = \mathbf{M} \times \{\varnothing\}. \tag{13}$$

Кроме того (см. [1, 2, 3, 4, 6]), $\overline{1,N} \in \mathcal{G}_N$ и $D_N \triangleq \{(x^0, \overline{1,N})\}$. Итак, определены крайние слои D_0 и D_N. В целях построения промежуточных слоев введем сначала множества

$$J_s(K) \triangleq \{j \in \overline{1,N} \setminus K \mid \{j\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}\}\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{14}$$

В терминах этих множеств конструируем специальные п/м X, полагая что

$$\mathcal{M}_s[K] \triangleq \bigcup_{j\in J_s(K)} M_j\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{15}$$

В свою очередь, на основе (15) определяются следующие клетки пространства позиций:

$$\mathbb{D}_s[K] \stackrel{\triangle}{=} \{(x,K):\ x \in \mathcal{M}_s[K]\}\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{16}$$

Каждая клетка (16) определяется соответствующим существенным списком и получается навешиванием «слева» на сам список точек множеств (15). Пусть

$$D_s \stackrel{\triangle}{=} \bigcup_{K \in \mathcal{G}_s} \mathbb{D}_s[K]\ \ \forall s \in \overline{1,N-1}. \tag{17}$$

Множества $D_1,...,D_{N-1}$ — промежуточные слои. При этом (см. [6, предложение 4.9.3])

$$D_s \in \mathcal{P}'(X \times \mathbf{N})\ \ \forall s \in \overline{0,N}. \tag{18}$$

В (17), (18) имеем систему слоев, на которых следует [1, 2, 3, 4] насчитывать значения функции Беллмана. Каждый из слоев — непустое множество в пространстве позиций. Теперь мы рекурсивно определяем функции $\mathcal{V}_0 \in \mathcal{R}_+[D_0],\ \mathcal{V}_1 \in \mathcal{R}_+[D_1],...,\mathcal{V}_N \in \mathcal{R}_+[D_N]$. Полагаем при этом, что функция $\mathcal{V}_0$ такова, что

$$\mathcal{V}_0(x,\varnothing) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{f}(x)\ \ \forall x \in \mathbf{M}. \tag{19}$$

В связи с преобразованием $\mathcal{V}_{s-1} \longrightarrow \mathcal{V}_s$ при $s \in \overline{1,N}$ напомним следующее свойство [6, предложение 4.9.4]: $\forall (x,K) \in D_s\ \forall k \in \mathbf{I}(K)\ \forall y \in M_k$

$$(y, K \setminus \{k\}) \in D_{s-1}. \tag{20}$$

Свойство (20) позволяет в условиях, его определяющих, использовать значения функции $\mathcal{V}_{s-1}$. С учетом этого полагаем (при $s \in \overline{1,N}$), что $\mathcal{V}_{s-1}$ преобразуется в $\mathcal{V}_s$ по правилу:

$$\mathcal{V}_s(x,K) \stackrel{\triangle}{=} \min_{j \in \mathbf{I}(K)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z), K \setminus \{j\})]\ \ \forall (x,K) \in D_s. \tag{21}$$

Посредством (19) и (21) определена рекурсивная процедура. В [1, 2, 3, 4] показано, что $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$ являются сужениями «единой» функции Беллмана, соответствующей расширению задачи (5). В этой связи напомним, что ранее были определены значения $v(x,K) \in [0,\infty[$ при $x \in X$ и $K \in \mathfrak{N}$. С учетом этого введем функцию $\mathfrak{V}:\ X \times \mathbf{N} \longrightarrow [0,\infty[$ посредством следующих правил: $(\mathfrak{V}(x,K) \stackrel{\triangle}{=} v(x,K)\ \ \forall x \in X\ \forall K \in \mathfrak{N})\ \&\ (\mathfrak{V}(x,\varnothing) \stackrel{\triangle}{=} \mathbf{f}(x)\ \ \forall x \in X)$. Тогда, как легко видеть, $\mathcal{V}_s = (\mathfrak{V}(z))_{z \in D_s}\ \ \forall s \in \overline{0,N}$. Существенно, что

$$V = \mathcal{V}_N(x^0, \overline{1,N}). \tag{22}$$

В дальнейшем исследуются вопросы качественного характера, связанные с построением вычислительных процедур для нахождения $\mathcal{V}_1,...,\mathcal{V}_N$ и значения (22). Эти вопросы касаются распределения существенных списков между гипотетическими процессорами.

4. Существенные списки заданий: общие свойства

Из (17) и (21) вытекает, что при распределении памяти можно ориентироваться всякий раз на списки соответствующей мощности, формирующие клетки; эти клетки образуют разбиение слоев пространства позиций. Таким образом, в конструкциях, связанных с распараллеливанием, можно использовать распределение (существенных) списков, имея в виду то, что каждый такой список однозначно определяет клетку пространства позиций (см. (16)).

В этой связи имеет смысл отметить ряд свойств существенных списков с целью последовательного их использования при построении параллельного алгоритма формирования слоев функции Беллмана (эти слои определяем в виде $\mathcal{V}_0, \mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$).

Предложение 1. $\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$.

Доказательство. Утверждение очевидно при $\mathbf{K} = \varnothing$, т.к. в этом случае $\mathcal{P}'(\mathbf{K}) = \varnothing$. Пусть $\mathbf{K} \neq \varnothing$, $n \overset{\triangle}{=} |\mathbf{K}|$ и $\mathfrak{M}_s \overset{\triangle}{=} \{\ K \in \mathcal{P}'(\mathbf{K}) \mid s = |K|\}\ \ \forall s \in \overline{1,n}$. Объединение всех семейств $\mathfrak{M}_s,\ s \in \overline{1,n}$, совпадает с $\mathcal{P}'(\mathbf{K})$. Из условия 2.1 вытекает, что

$$\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}_1\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}} \tag{23}$$

(следствие одноэлементности множеств из $\mathfrak{M}_1$). Пусть $m \in \overline{1, n-1}$ таково, что $\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}_m\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\ \ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}$. Пусть $\mathbb{K} \in \mathfrak{M}_{m+1}$. С учетом условия 2.1 подберем $z_* \in \mathbb{K}$ так, что

$$\mathrm{pr}_1(z_*) \neq \mathrm{pr}_2(\tilde{z})\ \ \forall \tilde{z} \in \mathbb{K}. \tag{24}$$

Поскольку $Q \overset{\triangle}{=} \mathbb{K} \setminus \{z_*\} \in \mathfrak{M}_m$, то для некоторого $z^* \in Q$ справедливо свойство

$$\mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z^*)\ \ \forall \tilde{z} \in Q. \tag{25}$$

С учетом (24) имеем, однако, что $\mathrm{pr}_1(z_*) \neq \mathrm{pr}_2(z^*)$, а тогда, используя (25), получаем, что $\mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z^*)\ \ \forall \tilde{z} \in \mathbb{K}$. Поскольку выбор $\mathbb{K}$ был произвольным, установлено, что

$$\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}_{m+1}\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}. \tag{26}$$

Поскольку выбор m был произвольным, установлено свойство: $\forall s \in \overline{1, n-1}$

$$(\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}_s\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}}) \Longrightarrow (\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathfrak{M}_{s+1}\ \exists z \in \tilde{\mathbf{K}}:\\ \mathrm{pr}_1(\tilde{z}) \neq \mathrm{pr}_2(z)\ \ \forall \tilde{z} \in \tilde{\mathbf{K}});$$

с учетом (23) получаем требуемое свойство. □

Предложение 2. $\forall s \in \overline{1, N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \exists j \in J_s(K):\ \ j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$.

Доказательство. Фиксируем $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$. Тогда $\overline{1,N} \setminus K \in \mathfrak{N}$.

1) Пусть сначала $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \varnothing$. Используя непустоту множества $\overline{1,N} \setminus K$, выберем и зафиксируем $\mathbf{p} \in \overline{1,N} \setminus K$. Тогда $\{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathfrak{N}_{s+1}$. Выберем произвольно $z_* \in \mathbf{K}$.

Допустим, что $\mathrm{pr}_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$. По свойствам K имеем (см. (9),(10)), что

$$(\mathrm{pr}_1(z_*) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z_*) \in K). \tag{27}$$

По выбору $\mathbf{p}$ имеем в случае $\mathrm{pr}_1(z_*) = \mathbf{p}$ импликацию $(\mathrm{pr}_2(z_*) \in \overline{1,N} \setminus K) \Longrightarrow (z_* \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K])$, а потому в рассматриваемом сейчас случае пустого множества $\Xi[\overline{1,N} \setminus K]$ непременно $\mathrm{pr}_2(z_*) \in K$. Следовательно, $(\mathrm{pr}_1(z_*) = \mathbf{p}) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z_*) \in K)$. С учетом (27) получаем во всех возможных (при условии $\mathrm{pr}_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$) случаях, что $\mathrm{pr}_2(z_*) \in K$. Тем самым установлена, в частности, импликация $(\mathrm{pr}_1(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(z_*) \in \{\mathbf{p}\} \cup K)$. Поскольку выбор z_* был произвольным, имеем из (9), (10) включение $\{\mathbf{p}\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}$, что означает по выбору $\mathbf{p}$ справедливость свойства $\mathbf{p} \in J_s(K)$; см. (14). Осталось установить, что $\mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)$. Для этого заметим, что согласно (8)

$$(\ \mathbf{p} \neq \mathrm{pr}_2(l)\ \ \forall l \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]) \Longrightarrow (\ \mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)). \tag{28}$$

Покажем, что посылка импликации (28) истинна. В самом деле, допустим противное: $\mathbf{p} = \mathrm{pr}_2(z_0)$ для некоторого $z_0 \in \Xi[\{\mathbf{p}\} \cup K]$. Тогда $z_0 \in \mathbf{K}$, $\mathrm{pr}_1(z_0) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$ и $\mathrm{pr}_2(z_0) \in \{\mathbf{p}\} \cup K$. При этом, поскольку $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \varnothing$, то согласно (7) $(\ \mathrm{pr}_1(z_0) \notin \overline{1,N} \setminus K)\ \vee\ (\ \mathrm{pr}_2(z_0) \notin \overline{1,N} \setminus K)$. Однако по выбору $\mathbf{p}$ имеем включение $\mathrm{pr}_2(z_0) \in \overline{1,N} \setminus K$. Поэтому $\mathrm{pr}_1(z_0) \in K$. В этом случае имеем по выбору K включение $\mathrm{pr}_2(z_0) \in K$, а тогда $\mathbf{p} \in K$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает истинность посылки импликации (28), а тогда $\mathbf{p} \in \mathbf{I}(\{\mathbf{p}\} \cup K)$. С учетом ранее установленного свойства $\mathbf{p} \in J_s(K)$ получаем в случае 1), что $\exists j \in J_s(K):\ j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$. Итак,

$$(\Xi[\overline{1,N} \setminus K] = \varnothing) \Longrightarrow (\exists j \in J_s(K):\ j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)). \tag{29}$$

2) Пусть $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \neq \varnothing$. Тогда $\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \in \mathcal{P}'(\mathbf{K})$, а потому согласно предложению 1 для некоторой упорядоченной пары $\rho \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]$ имеем свойство

$$\mathrm{pr}_1(z) \neq \mathrm{pr}_2(\rho)\ \ \forall z \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]. \tag{30}$$

Рассмотрим множество $\mathbb{K} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathrm{pr}_2(\rho)\} \cup K \in \mathfrak{N}_{s+1}$ (учитываем (7)). Покажем, что $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{s+1}$. Действительно, пусть $\lambda \in \mathbf{K}$. Допустим, что $\mathrm{pr}_1(\lambda) \in \mathbb{K}$. Если $\mathrm{pr}_1(\lambda) = \mathrm{pr}_2(\rho)$, то в случае $\mathrm{pr}_2(\lambda) \in \overline{1,N} \setminus K$ имеем по выбору ρ, что $\lambda \in \Xi[\overline{1,N} \setminus K]$ и, как следствие (см. (30)), противоречие. Стало быть, при $\mathrm{pr}_1(\lambda) = \mathrm{pr}_2(\rho)$ непременно $\mathrm{pr}_2(\lambda) \in K$. В частности,

$$(\mathrm{pr}_1(\lambda) = \mathrm{pr}_2(\rho)) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{31}$$

Пусть теперь $\mathrm{pr}_1(\lambda) \in K$. Тогда по выбору K имеем из (9), (10) что $\mathrm{pr}_2(\lambda) \in K$. Итак,

$$(\mathrm{pr}_1(\lambda) \in K) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(\lambda) \in \mathbb{K}). \tag{32}$$

Из (31), (32) имеем во всех возможных при условии $\mathrm{pr}_1(\lambda) \in \mathbb{K}$ случаях включение $\mathrm{pr}_2(\lambda) \in \mathbb{K}$. Следовательно, $(\mathrm{pr}_1(\lambda) \in \mathbb{K}) \Longrightarrow (\mathrm{pr}_2(\lambda) \in \mathbb{K})$. Поскольку выбор λ был произвольным, установлено (см. (9)), что $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{s+1}$. При этом (см. (30)) $\mathrm{pr}_1(\rho) \neq \mathrm{pr}_2(\rho)$ и по выбору ρ $\ \mathrm{pr}_1(\rho) \notin K$. В итоге $\mathrm{pr}_1(\rho) \notin \mathbb{K}$ и, в частности, $\rho \notin \Xi[\mathbb{K}]$ (см. (7)). При этом $\mathrm{pr}_2(\rho) \neq \mathrm{pr}_2(l)\ \ \forall l \in \Xi[\mathbb{K}]$. Действительно, допустим противное: $\mathrm{pr}_2(\rho) = \mathrm{pr}_2(l_*)$ для некоторой упорядоченной пары $l_* \in \Xi[\mathbb{K}]$. В силу условия 2.1 $\mathrm{pr}_1(l_*) \neq \mathrm{pr}_2(l_*)$, откуда следует, что $\mathrm{pr}_1(l_*) \in \mathbb{K} \setminus \{\mathrm{pr}_2(\rho)\}$, т.е. $\mathrm{pr}_1(l_*) \in K$ и (по выбору K) имеем включение $\mathrm{pr}_2(l_*) \in K$ и, как следствие, $\mathrm{pr}_2(\rho) \in K$, что противоречит (см. (7)) выбору ρ. Противоречие доказывает требуемое свойство, а тогда (см. (8)) $\mathrm{pr}_2(\rho) \in \mathbf{I}(\mathbb{K})$. Поскольку $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{s+1}$, то (см. определение $\mathbb{K}$) $\mathrm{pr}_2(\rho) \in J_s(K):\ \mathrm{pr}_2(\rho) \in \mathbf{I}(\{\mathrm{pr}_2(\rho)\} \cup K)$. Итак, и в случае 2) непременно $\exists j \in J_s(K):\ j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K)$. Следовательно, $(\Xi[\overline{1,N} \setminus K] \neq \varnothing) \Longrightarrow (\exists j \in J_s(K):\ j \in \mathbf{I}(\{j\} \cup K))$. С учетом (29), имеем требуемое утверждение во всех возможных случаях. $\square$

Предложение 3. $\mathcal{G}_{s-1} = \{K \in \mathfrak{N}_{s-1} \mid \exists \tilde{K} \in \mathcal{G}_s\ \exists j \in \mathbf{I}(\tilde{K}):\ K = \tilde{K} \setminus \{j\}\}\ \ \forall s \in \overline{2,N}$.

Доказательство. Пусть $s \in \overline{2,N}$ и $\mathfrak{K} \stackrel{\triangle}{=} \{K \in \mathfrak{N}_{s-1} \mid \exists \tilde{K} \in \mathcal{G}_s\ \exists j \in \mathbf{I}(\tilde{K}):\ K = \tilde{K} \setminus \{j\}\}$. Из (12) следует, что $\mathfrak{K} \subset \mathcal{G}_{s-1}$. Пусть $T \in \mathcal{G}_{s-1}$. Тогда в силу предложения 2 имеем для некоторого $\nu \in J_{s-1}(T)$ свойство $\nu \in \mathbf{I}(\{\nu\} \cup T)$, где согласно (14) $\{\nu\} \cup T \in \mathcal{G}_s$. При этом $T = (\{\nu\} \cup T) \setminus \{\nu\}$, т.к. $\nu \notin T$. Следовательно, $T \in \mathfrak{K}$. Итак, $\mathcal{G}_{s-1} \subset \mathfrak{K}$. $\square$

Из предложения 3 и (9),(10) вытекает, что

$$(\mathcal{G}_N = \{\overline{1,N}\})\ \&\ (\ \mathcal{G}_{s-1} = \{K \setminus \{j\}:\ K \in \mathcal{G}_s,\ j \in \mathbf{I}(K)\}\ \ \forall s \in \overline{2,N}). \tag{33}$$

Предложение 4. *Если* $s \in \overline{1,N-1},\ K \in \mathcal{G}_s$ *и* $n \in J_s(K)$, *то* $n \in \mathbf{I}(\{n\} \cup K)$.

Доказательство. По выбору n получаем из (14), что $n \in \overline{1,N} \setminus K$, причем $\{n\} \cup K \in \mathcal{G}_{s+1}$. Это означает, что (см. (9),(10)) $\forall z \in \mathbf{K} \quad (\ \mathrm{pr}_1(z) \notin \{n\} \cup K) \ \vee \ (\ \mathrm{pr}_2(z) \in \{n\} \cup K)$. Аналогичным свойством обладает и множество K, т.е. $\forall z \in \mathbf{K}$

$$(\ \mathrm{pr}_1(z) \notin K) \ \vee \ (\ \mathrm{pr}_2(z) \in K). \tag{34}$$

При этом $n \in \{n\} \cup K$, а тогда непременно справедливо следующее свойство:

$$n \neq \mathrm{pr}_2(l) \ \ \forall l \in \Xi[\{n\} \cup K]. \tag{35}$$

В самом деле, допустим противное: $n = \mathrm{pr}_2(\lambda)$, где $\lambda \in \Xi[\{n\} \cup K]$. Согласно условию 2.1 $\mathrm{pr}_1(\lambda) \neq n$. По выбору λ имеем, что $\mathrm{pr}_1(\lambda) \in K$ и в силу (34) $n = \mathrm{pr}_2(\lambda) \in K$, что невозможно по выбору n. Противоречие доказывает (35), а тогда $n \in \mathbf{I}(\{n\} \cup K)$. □

В качестве очевидного следствия предложения 2 отметим здесь же тот факт, что

$$J_s(K) \neq \varnothing \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{36}$$

Из (15) и (36) получаем, в частности, следующее свойство

$$\mathcal{M}_s[K] \in \mathcal{P}'(X) \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s. \tag{37}$$

Разумеется, каждая клетка (16) является в силу (37) непустым множеством в пространстве позиций. С (37) можно связать сужения слоев функции Беллмана, учитывая, что согласно(16) $(x, K) \in \mathbb{D}_s[K] \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \forall x \in \mathcal{M}_s[K]$. Согласно (17)

$$(x, K) \in D_s \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}\ \forall K \in \mathcal{G}_s\ \forall x \in \mathcal{M}_s[K]. \tag{38}$$

С учетом (38) и определений раздела 4 полагаем, что при $s \in \overline{1, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_s$ функция

$$\tilde{\mathcal{V}}_s[K] \in \mathcal{R}_+[\mathcal{M}_s[K]] \tag{39}$$

определяется условием: $\tilde{\mathcal{V}}_s[K](x) \overset{\triangle}{=} \mathcal{V}_s(x, K) \ \ \forall x \in \mathcal{M}_s[K]$; (39) рассматриваем в качестве клеток функции Беллмана.

В заключении раздела рассмотрим этап, связанный с определением V (22) и являющийся по смыслу заключительным при построении слоев функции Беллмана; значение (22) определяется в терминах $\mathcal{V}_{N-1} \in \mathcal{R}_+[D_{N-1}]$:

$$V = \min_{j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x^0, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{N-1}(\mathrm{pr}_2(z), \overline{1,N} \setminus \{j\})]. \tag{40}$$

Напомним, что D_{N-1} есть объединение всех клеток $\mathbb{D}_{N-1}[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$. При этом

$$\mathbb{D}_{N-1}[K] = \{(x, K) :\ x \in \mathcal{M}_{N-1}[K]\} \ \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-1}. \tag{41}$$

Если $K \in \mathcal{G}_{N-1}$, то $\mathcal{M}_{N-1}[K] \in \mathcal{P}'(X)$ есть объединение всех множеств $M_i,\ i \in J_{N-1}(K)$, а функция-клетка $\tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[K]$ такова, что $\tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[K](x) = \mathcal{V}_{N-1}(x, K) \ \ \forall x \in \mathcal{M}_{N-1}[K]$. Учитывая (41), получаем, что система $\tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$, исчерпывающим образом определяет слой $\mathcal{V}_{N-1}$ и (см. (40)) позволяет вычислять V. Согласно предложению 3 и (33)

$$\mathcal{G}_{N-1} = \{\overline{1,N} \setminus \{j\} :\ j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})\}. \tag{42}$$

Поэтому вышеупомянутая система клеток сводится (см. (42)) к набору

$$\tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{j\}],\ j \in \mathbf{I}(\overline{1,N}). \tag{43}$$

В связи с (42), (43) уместно вернуться к представлению множеств $\mathcal{M}_{N-1}[K],\ K \in \mathcal{G}_{N-1}$.

Предложение 5. *Если* $n \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, *то* $\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{n\}] = M_n$.

Доказательство. Напомним, что $\overline{1,N} \setminus \{n\} \in \mathcal{G}_{N-1}$ (см. (42)). Поскольку согласно (8) $n \in \overline{1,N}$, то $\overline{1,N} \setminus (\overline{1,N} \setminus \{n\}) = \{n\}$ и $J_{N-1}(\overline{1,N} \setminus \{n\}) = \{j \in \{n\} \mid \{j\} \cup (\overline{1,N} \setminus \{n\}) \in \mathcal{G}_N\} = \{n\}$, поскольку $\{n\} \cup (\overline{1,N} \setminus \{n\}) = \overline{1,N} \in \mathcal{G}_N$ (см. (33)). Но тогда согласно (15) получаем требуемое равенство $\mathcal{M}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{n\}] = M_n$. $\square$

Из (41), (42) и предложения 5 вытекает, что $\mathbb{D}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{j\}] = \{(x, \overline{1,N} \setminus \{j\}) : x \in M_j\} \ \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$. При этом $\tilde{\mathcal{V}}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{j\}] \in \mathcal{R}_+[M_j] \ \forall j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$. Упомянутые функции-клетки реализуют весь набор (43) и позволяют вычислять V (40), поскольку согласно (42) D_{N-1} есть объединение всех множеств $\mathbb{D}_{N-1}[\overline{1,N} \setminus \{j\}]$, $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$.

5. Схема параллельных вычислений с элементами «дискретной динамики»: предваряющие конструкции

Конструкция, связанная с (40) и изложенная в заключении предыдущего раздела, доставляет следующую схему построения усеченного массива значений функции Беллмана.

Имея в виду «умеренную» величину N и эффект применения оператора $\mathbf{I}$, можно предполагать возможность использования для вычислений $|\mathbf{I}(\overline{1,N})|$ процессоров, каждый из которых будет ответственным за список $\overline{1,N} \setminus \{j\}$ для соответствующего номера $j \in \mathbf{I}(\overline{1,N})$, а также за решение задач, приводящих к реализации нужной клетки пространства позиций и отвечающей ей клетки значений функции Беллмана. Ниже предлагается процедура реализации независимых вычислений упомянутых функций-клеток, приводящая к построению слоя $\mathcal{V}_{N-1}$, после чего следует осуществить вычисление V в соответствии с (40). Итак (см. (42)), предполагается распределить между процессорами все (существенные) списки $K \in \mathcal{G}_{N-1}$, выделяя каждому процессору ровно один такой список. Тогда оказывается возможным реализовать последующую работу процессоров без какого-либо взаимодействия друг с другом вплоть до финального вычисления V (40). Для этого потребуются некоторые вспомогательные построения, приводимые ниже; в частности, возникает необходимость в рассмотрении динамических систем с дискретным временем.

Всюду в дальнейшем полагаем, что $3 \leq N$. Если $r \in \overline{2, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, то через $\mathcal{T}_r[K]$ обозначаем далее множество всех кортежей

$$(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} : \overline{0, N-r} \longrightarrow \mathcal{G}, \tag{44}$$

для каждого из которых справедливы следующие свойства

$$(K_0 = K) \ \& \ (\forall j \in \overline{1, N-r} \ \exists s \in \mathbf{I}(K_{j-1}) : \ K_j = K_{j-1} \setminus \{s\}). \tag{45}$$

Мы интерпретируем кортежи (44), (45) как траектории некоторого процесса формирования существенных списков; для наших целей особенно важен случай, когда в (44), (45) $r = 2$, поскольку в этом случае мы имеем траектории, стартующие из начальных состояний $K \in \mathcal{G}_{N-1}$ (см. (42)), что отвечает вышеупомянутой идее распараллеливания.

Предложение 6. *Если* $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$ *и* $j \in \overline{0, N-r}$, *то* $K_j \in \mathcal{G}_{N-(r+j)+1}$.

Доказательство сводится (см. (45)) к применению математической индукции.

Предложение 7. $\mathcal{T}_r[K] \neq \varnothing \ \ \forall r \in \overline{2, N-1} \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$.

Доказательство. Пусть $r \in \overline{2, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$. Полагаем, что

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t \overset{\triangle}{=} \{(K_i)_{i \in \overline{0,t}} \in \prod_{i=0}^{t} \mathcal{G}_{N-(r+i)+1} \mid (K_0 = K) \ \& \ (\forall j \in \overline{1,t} \ \exists s \in \mathbf{I}(K_{j-1}) : \\ K_j = K_{j-1} \setminus \{s\})\} \ \ \forall t \in \overline{0, N-r}. \end{aligned} \tag{46}$$

Поскольку $\overline{1,0} = \varnothing$, из (46) вытекает, что $\mathfrak{M}_0 \neq \varnothing$. Кроме того, из (44)-(46) и предложения 6 следует, что $\mathfrak{M}_{N-r} = \mathcal{T}_r[K]$. Покажем, что

$$\mathfrak{M}_t \neq \varnothing \ \ \forall t \in \overline{0, N-r}. \tag{47}$$

В самом деле, допустим противное, т.е. $\exists t \in \overline{0, N-r} : \ \mathfrak{M}_t = \varnothing$. Это означает, что $\mathbb{T} \overset{\triangle}{=} \{t \in \overline{0, N-r} \mid \mathfrak{M}_t = \varnothing\}$ есть непустое п/м $\overline{0, N-r}$; при этом $\tau \overset{\triangle}{=} \inf(\mathbb{T}) \in \overline{0, N-r}$ есть наименьший элемент $\mathbb{T}$, $\tau \in \mathbb{T} \setminus \{0\}$. Тогда $\tau - 1 \in \overline{0, N-(r+1)} \setminus \mathbb{T}$; $\mathfrak{M}_{\tau-1} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем и зафиксируем $(K_i^*)_{i \in \overline{0,\tau-1}} \in \mathfrak{M}_{\tau-1}$. Тогда $(K_i^*)_{i \in \overline{0,\tau-1}} : \ \overline{0, \tau-1} \longrightarrow \mathcal{G}$;

$$K_j^* \in \mathcal{G}_{N-(r+j)+1} \ \ \forall j \in \overline{0, \tau-1}, \tag{48}$$

$K_0^* = K$. Из (48) следует, в частности, что $K_{\tau-1}^* \in \mathfrak{N}_{N-(r+\tau)+2}$, где $2 \leq N-(r+\tau)+2$ и, следовательно, $2 \leq |K_{\tau-1}^*|$. При этом $\mathbf{I}(K_{\tau-1}^*) \neq \varnothing$ по свойствам $\mathbf{I}$. С учетом этого выберем $\theta \in \mathbf{I}(K_{\tau-1}^*)$, получая множество

$$K_{\tau-1}^* \setminus \{\theta\} \in \mathcal{G}_{N-(r+\tau)+1} \tag{49}$$

(см. (33), (48)). С учетом этого полагаем (см. (48), (49)), что кортеж $(\tilde{K}_i^*)_{i \in \overline{0,\tau}} : \ \overline{0, \tau} \longrightarrow \mathcal{G}$ определяется условиями $(\tilde{K}_j^* \overset{\triangle}{=} K_j^* \ \ \forall j \in \overline{0, \tau-1})$ & $(\tilde{K}_\tau^* = \tilde{K}_{\tau-1}^* \setminus \{\theta\})$. Легко видеть, что (см. (46), (48), (49)) $(\tilde{K}_i^*)_{i \in \overline{0,\tau}} \in \mathfrak{M}_\tau$, что невозможно, т.к. $\tau \in \mathbb{T}$. Полученное противоречие доказывает (47), а тогда, в частности, $\mathcal{T}_r[K] \neq \varnothing$. $\square$

Если $r \in \overline{2, N-1}$, $t \in \overline{r, N-1}$ и $\tilde{K} \in \mathcal{G}_{N-t+1}$, то $t \in \overline{2, N-1}$ и определено множество $\mathcal{T}_t[\tilde{K}]$, состоящее из отображений «промежутка» $\overline{0, N-t}$ в $\mathcal{G}$. В качестве $\tilde{K}$ можно, в частности, использовать значение траектории (см. (44),(45)). Точнее, имеем при $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$ и $j \in \overline{0, N-r}$, что $N-(r+j)+1 \in \overline{1, N-r+1}$ и при этом (см. предложение 6) $K_j \in \mathcal{G}_{N-(r+j)+1}$. Если же $r \in \overline{2, N-1}$ и $j \in \overline{0, N-(r+1)}$, то $r+j \in \overline{2, N-1}$, а тогда определены множества $\mathcal{T}_{r+j}[\tilde{K}]$ при $\tilde{K} \in \mathcal{G}_{N-(r+j)+1}$. Следовательно, с учетом предложения 6 имеем, что при $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$ и $j \in \overline{0, N-(r+1)}$ определено множество $\mathcal{T}_{r+j}[K_j]$ и, вместе с тем,

$$j + s \in \overline{j, N-r} \ \ \forall s \in \overline{0, N-(r+j)}; \tag{50}$$

поэтому имеем $K_{j+t} \in \mathcal{G}$ при $t \in \overline{0, N-(r+j)}$. Отметим аналог полугруппового свойства.

Предложение 8. *При* $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, $(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$ *и* $j \in \overline{0, N-(r+1)}$

$$(K_{j+s})_{s \in \overline{0,N-(r+j)}} \in \mathcal{T}_{r+j}[K_j]. \tag{51}$$

Доказательство. Учитывая (50), конструируем кортеж в левой части (51):

$$(K_{j+s})_{s \in \overline{0,N-(r+j)}} : \ \overline{0, N-(r+j)} \longrightarrow \mathcal{G}.$$

При этом для $p \in \overline{1, N-(r+j)}$ имеем $j+p \in \overline{j+1, N-r}$, а индекс $p-1 \in \overline{0, N-(r+j)-1}$ реализует включение $j+(p-1) \in \overline{j, N-(r+1)}$; согласно (45) для некоторого $l \in \mathbf{I}(K_{j+(p-1)})$ имеем равенство $K_{j+p} = K_{j+(p-1)} \setminus \{l\}$. Таким образом, $\forall s \in \overline{1, N-(r+j)} \ \exists \nu \in \mathbf{I}(K_{j+(s-1)}) :$ $K_{j+s} = K_{j+(s-1)} \setminus \{\nu\}$. Свойство (51) установлено (см. (44),(45)). $\square$

Предложение 9. *Пусть* $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$, $(\tilde{K}_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$, $j \in \overline{0, N-(r+1)}$, $(\hat{K}_i)_{i \in \overline{0,N-(r+j)}} \in \mathcal{T}_{r+j}[\tilde{K}_j]$, *а кортеж*

$$(\mathbb{K}_i)_{i \in \overline{0,N-r}} : \ \overline{0, N-r} \longrightarrow \mathcal{G} \tag{52}$$

определяется следующими условиями:

$$(\mathbb{K}_t \overset{\triangle}{=} \tilde{K}_t \ \ \forall t \in \overline{0,j}) \ \& \ (\mathbb{K}_t \overset{\triangle}{=} \hat{K}_{t-j} \ \ \forall t \in \overline{j+1, N-r}). \tag{53}$$

Тогда кортеж (52) *обладает следующим свойством:* $(\mathbb{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$.

Доказательство. Из определений следует, что $\mathbb{K}_0 = \tilde{K}_0 = K$. Выберем произвольно $t \in \overline{1, N-r}$. Тогда для $t-1 \in \overline{0, N-(r+1)}$ имеем, что

$$(t-1 \leq j) \ \vee \ (j < t-1). \tag{54}$$

Оба случая в (54) рассмотрим отдельно. Пусть сначала имеет место случай

1) $t-1 \leq j$. Тогда $t-1 \in \overline{0,j}$ и согласно (53) $\mathbb{K}_{t-1} = \tilde{K}_{t-1} \in \mathcal{G}$; так как $t \in \overline{1, j+1}$, то

$$(t \in \overline{1,j}) \ \vee \ (t = j+1). \tag{55}$$

Случаи, отмеченные в (55), также рассмотрим отдельно. Пусть сначала

a) $t \in \overline{1,j}$. Тогда согласно (53) $\mathbb{K}_t = \tilde{K}_t$ и по выбору $(\tilde{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}}$ получаем, поскольку $t-1 \in \overline{0, N-(r+1)}$, что $\mathbb{K}_t = \tilde{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s'\}$ для некоторого $s' \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1})$ (см. (45)); здесь учтено, что $\mathbb{K}_{t-1} = \tilde{K}_{t-1}$. Рассмотрение случая a) завершено; получили импликацию

$$(t \in \overline{1,j}) \Longrightarrow (\exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1}) : \ \mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s\}). \tag{56}$$

b) Пусть $t = j+1$. Тогда $t \in \overline{j+1, N-r}$ и $\mathbb{K}_t = \hat{K}_1$ согласно (53). По выбору $(\hat{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+j)}}$ имеем из (45), что для некоторого $s'' \in \mathbf{I}(\tilde{K}_j)$ $\quad \mathbb{K}_t = \tilde{K}_j \setminus \{s''\}$. Однако в рассматриваемом случае $\mathbb{K}_{t-1} = \tilde{K}_j$ согласно (53); в итоге $\mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s''\}$, где $s'' \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1})$. Рассмотрение случая b) завершено; установлена импликация

$$(t = j+1) \Longrightarrow (\exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1}) : \ \mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s\}). \tag{57}$$

Из (56) и (57) получаем, что в случае 1) непременно $\exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1}) : \ \mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s\}$. Итак, $(t-1 \leq j) \Longrightarrow (\exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1}) : \ \mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s\})$.

2) Пусть $j < t-1$. Тогда $\mathbb{K}_{t-1} = \hat{K}_{t-(j+1)}$ и, кроме того, $\mathbb{K}_t = \hat{K}_{t-j}$. По выбору $(\hat{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+j)}}$ имеем, что $\mathbb{K}_t = \hat{K}_{t-j} = \hat{K}_{t-(j+1)} \setminus \{s_0\} = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s_0\}$ для некоторого $s_0 \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1})$. Итак, $(j < t-1) \Longrightarrow (\exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{t-1}) : \ \mathbb{K}_t = \mathbb{K}_{t-1} \setminus \{s\})$.

Поскольку выбор t был произвольным, имеем (см. (54)), что $\forall i \in \overline{1, N-r} \ \exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{i-1}) :$ $\mathbb{K}_i = \mathbb{K}_{i-1} \setminus \{s\}$. Итак (см. (44), (45), (52)), $(\mathbb{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$. □

Предложение 10. *Если* $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ *и* $s \in \mathbf{I}(K)$, *то* $\exists (K_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K] :$ $K \setminus \{s\} = K_1$.

Доказательство. Фиксируем $r \in \overline{2, N-1}$, $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ и $s \in \mathbf{I}(K)$. Пусть

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_k \overset{\triangle}{=} \{(\tilde{K}_i)_{i\in\overline{0,k}} \in \prod_{i=0}^{k} \mathcal{G}_{N-(r+i)+1} \mid (\tilde{K}_0 = K) \ \& \ (\tilde{K}_1 = K \setminus \{s\}) \ \& \\ \& \ (\forall j \in \overline{1,k} \ \exists \tilde{s} \in \mathbf{I}(\tilde{K}_{j-1}) : \ \tilde{K}_j = \tilde{K}_{j-1} \setminus \{\tilde{s}\})\} \ \ \forall k \in \overline{1, N-r}. \end{aligned} \tag{58}$$

Тогда (см. (10), (44), (45), (58)) имеем очевидное вложение

$$\mathfrak{M}_{N-r} \subset \mathcal{T}_r[K]. \tag{59}$$

Покажем, что $\mathfrak{M}_k \neq \varnothing \quad \forall k \in \overline{1, N-r}$. В самом деле, допустим противное: пусть $\exists k \in \overline{1, N-r}: \mathfrak{M}_k = \varnothing$. Тогда $\mathbb{T} \triangleq \{k \in \overline{1, N-r} \mid \mathfrak{M}_k = \varnothing\} \in \mathcal{P}'(\overline{1, N-r})$; при этом $\tau \triangleq \inf(\mathbb{T}) \in \mathbb{T}$. Легко видеть, что $\mathfrak{M}_1 \neq \varnothing$ (действительно, для

$$(K_i^\natural)_{i \in \overline{0,1}} \in \prod_{i=0}^{1} \mathcal{G}_{N-(r+i)+1},\ K_0^\natural \triangleq K,\ K_1^\natural \triangleq K \setminus \{s\},$$

имеем: $(K_i^\natural)_{i \in \overline{0,1}} \in \mathfrak{M}_1$), а тогда $1 \notin \mathbb{T}$. Поэтому $\tau \neq 1$ и, следовательно, $\tau \in \overline{2, N-r}$, а потому $\tau - 1 \in \overline{1, N-(r+1)} \setminus \mathbb{T}$. Тогда $\mathfrak{M}_{\tau-1} \neq \varnothing$. С учетом этого выберем произвольно и зафиксируем кортеж $(\hat{K}_i)_{i \in \overline{0, \tau-1}} \in \mathfrak{M}_{\tau-1}$. Тогда $(\hat{K}_i)_{i \in \overline{0,\tau-1}} \in \prod\limits_{i=0}^{\tau-1} \mathcal{G}_{N-(r+i)+1}$; при этом $\hat{K}_0 = K, \hat{K}_1 = K \setminus \{s\}$ и, наконец, справедливы свойства

$$\forall j \in \overline{1, \tau-1}\ \exists \tilde{s} \in \mathbf{I}(\hat{K}_{j-1}):\ \hat{K}_j = \hat{K}_{j-1} \setminus \{\tilde{s}\}. \tag{60}$$

Заметим, что $N - (r+\tau) + 2 \in \overline{2, N-r}$ и $\hat{K}_{\tau-1} \in \mathcal{G}_{N-(r+\tau)+2}$. Согласно (12) имеем, что

$$\hat{K}_{\tau-1} \setminus \{k\} \in \mathcal{G}_{N-(r+\tau)+1} \quad \forall k \in \mathbf{I}(\hat{K}_{\tau-1}). \tag{61}$$

Заметим, что $\hat{K}_{\tau-1} \in \mathfrak{N}$, а потому $\mathbf{I}(\hat{K}_{\tau-1}) \in \mathfrak{N}$; в частности, $\mathbf{I}(\hat{K}_{\tau-1}) \neq \varnothing$. Выберем произвольно и зафиксируем $\nu \in \mathbf{I}(\hat{K}_{\tau-1})$, получая согласно (61) $\hat{K}_{\tau-1} \setminus \{\nu\} \in \mathcal{G}_{N-(r+\tau)+1}$. С учетом этого определяем кортеж $(K_i^*)_{i \in \overline{0,\tau}}: \ \overline{0,\tau} \longrightarrow \mathcal{G}$ посредством следующих условий: $(K_j^* \triangleq \hat{K}_j \quad \forall j \in \overline{0, \tau-1})$ & $(K_\tau^* \triangleq \hat{K}_{\tau-1} \setminus \{\nu\})$. Легко видеть, что $(K_i^*)_{i \in \overline{0,\tau}} \in \mathfrak{M}_\tau$ (см. (58)). Последнее невозможно, т.к. $\tau \in \mathbb{T}$. Противоречие показывает, что $\mathfrak{M}_k \neq \varnothing \ \ \forall k \in \overline{1, N-r}$. В частности, $\mathfrak{M}_{N-r} \neq \varnothing$, а тогда (см. (58),(59)) $\exists (K_i)_{i \in \overline{0, N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]:\ K \setminus \{s\} = K_1$. □

Условимся о следующем обозначении: если $r \in \overline{2, N-1},\ K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ и $t \in \overline{0, N-r}$, то

$$\tilde{\mathbb{T}}_r[K; t] \triangleq \{\ K_t:\ (K_i)_{i \in \overline{0, N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]\}. \tag{62}$$

По смыслу множество (62) соответствует области достижимости (ОД) в теории управления [17, 18, 19]; в самом деле, речь идет о множестве состояний достижимых на траекториях «системы » в момент t из начального состояния K. При $r \in \overline{2, N-1}$ и $K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$

$$(\tilde{\mathbb{T}}_r[K; 0] = \{K\})\ \&\ (\tilde{\mathbb{T}}_r[K; N-r] \subset \mathcal{G}_1). \tag{63}$$

Предложение 11. *Если $r \in \overline{2, N-1},\ K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ и $t \in \overline{0, N-r}$, то*

$$\tilde{\mathbb{T}}_r[K; t] \subset \mathcal{G}_{N-(r+t)+1}. \tag{64}$$

Доказательство. В силу (63) свойство (64) имеет место при $t = 0$. Далее, из предложения 6 имеем в общем случае $t \in \overline{0, N-r}$ свойство $\tilde{K}_t \in \mathcal{G}_{N-(r+t)+1} \quad \forall (\tilde{K}_i)_{i \in \overline{0, N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$. Из (62) получаем требуемое вложение (64). □

Следующее положение характеризует естественное свойство исчерпывания множеств (10) областями достижимости (62) при всех отличных от N значениях параметра, характеризующего мощность списков.

Предложение 12. *Если $r \in \overline{2, N-1}$ и $\mathbf{t} \in \overline{0, N-r}$, то справедливо равенство*

$$\mathcal{G}_{N-(r+\mathbf{t})+1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; \mathbf{t}]. \tag{65}$$

Доказательство. С учетом (63) и предложения 7 имеем очевидное равенство

$$\mathcal{G}_{N-r+1} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; 0]. \tag{66}$$

Покажем, что (65) верно при всех $\mathbf{t} \in \overline{0, N-r}$. В самом деле, допустим противное, т.е.

$$\exists j \in \overline{0, N-r} : \ \mathcal{G}_{N-(r+j)+1} \neq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; j]. \tag{67}$$

Это означает, что справедливо следующее свойство:

$$\mathcal{Z} \stackrel{\triangle}{=} \{j \in \overline{0, N-r} \mid \mathcal{G}_{N-(r+j)+1} \neq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; j]\} \in \mathcal{P}'(\overline{0, N-r}). \tag{68}$$

Из (67), (68) следует, что $0 \notin \mathcal{Z}$ и $z \stackrel{\triangle}{=} \inf(\mathcal{Z}) \in \mathcal{Z}$. Тогда $z \in \overline{1, N-r}$ и

$$\mathcal{G}_{N-(r+z)+1} \neq \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; z]. \tag{69}$$

Тогда $z - 1 \in \overline{0, N-(r+1)} \setminus \mathcal{Z}$, а потому имеем следующее равенство:

$$\mathcal{G}_{N-(r+z)+2} = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; z-1]. \tag{70}$$

Далее, с учетом предложения 11 имеем очевидное вложение

$$\bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; z] \subset \mathcal{G}_{N-(r+z)+1}. \tag{71}$$

Используя комбинацию (69) и (71), выберем и зафиксируем произвольное множество

$$M \in \mathcal{G}_{N-(r+z)+1} \setminus (\bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K; z]). \tag{72}$$

Напомним, что $N-(r+z)+2 \in \overline{2, N-r+1}$. Тогда, в частности, $N-(r+z)+2 \in \overline{2, N-1}$, а потому из (33) и (72) следует, что $\exists \tilde{K} \in \mathcal{G}_{N-(r+z)+2}\ \exists j \in \mathbf{I}(\tilde{K}) : \ M = \tilde{K} \setminus \{j\}$. Пусть $\Theta \in \mathcal{G}_{N-(r+z)+2}$ и $\theta \in \mathbf{I}(\Theta)$ реализуют равенство

$$M = \Theta \setminus \{\theta\}. \tag{73}$$

По свойствам z имеем включение $p \stackrel{\triangle}{=} (r+z) - 1 \in \overline{2, N-1}$; поэтому $\Theta \in \mathcal{G}_{N-p+1}$, а тогда из (73) и предложения 10 вытекает, что для некоторой траектории $(\mathbb{K}_i)_{i \in \overline{0, N-p}} \in \mathcal{T}_p[\Theta]$ справедливо равенство $M = \mathbb{K}_1$. Отметим, что $N - p = N - (r+z) + 1$; поэтому

$$(\mathbb{K}_i)_{i \in \overline{0, N-(r+z)+1}} \in \mathcal{T}_p[\Theta] : \ M = \mathbb{K}_1. \tag{74}$$

При этом $(\mathbb{K}_i)_{i \in \overline{0, N-(r+z)+1}} : \ \overline{0, N-(r+z)+1} \longrightarrow \mathcal{G}$; $\mathbb{K}_0 = \Theta$ и $\forall j \in \overline{1, N-(r+z)+1}\ \exists s \in \mathbf{I}(\mathbb{K}_{j-1}) : \ \mathbb{K}_j = \mathbb{K}_{j-1} \setminus \{s\}$. С учетом (70) имеем по выбору Θ, что для некоторого $\mathbb{G} \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ непременно $\Theta \in \tilde{\mathbb{T}}_r[\mathbb{G}; z-1]$. Согласно (62)

$$\Theta = G^*_{z-1} \tag{75}$$

для некоторой траектории $(G^*_i)_{i \in \overline{0, N-r}} \in \mathcal{T}_r[\mathbb{G}]$. Осуществим склеивание траекторий, используя предложение 9 при условиях, когда (в этом предложении) $K = \mathbb{G}$, $(\tilde{K}_i)_{i \in \overline{0, N-r}} = (G^*_i)_{i \in \overline{0, N-r}}$, $j = z - 1$, $(\hat{K}_i)_{i \in \overline{0, N-(r+j)}} = (\mathbb{K}_i)_{i \in \overline{0, N-(r+z)+1}}$ (учитываем, что согласно

(74), (75) $(\mathbb{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+z)+1}} \in \mathcal{T}_{r+(z-1)}[G^*_{z-1}]$). Определяем (следуя предложению 9) кортеж $(\Lambda_i)_{i\in\overline{0,N-r}} : \overline{0,N-r} \longrightarrow \mathcal{G}$ (см. (44),(45)) посредством условий

$$(\Lambda_t \stackrel{\triangle}{=} G^*_t \ \ \forall t \in \overline{0,z-1}) \ \& \ (\Lambda_t \stackrel{\triangle}{=} \mathbb{K}_{t-(z-1)} \ \ \forall t \in \overline{z,N-r}); \tag{76}$$

согласно предложению 9 имеем следующее положение

$$(\Lambda_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[\mathbb{G}]. \tag{77}$$

Поскольку в силу (62) $\tilde{\mathbb{T}}_r[\mathbb{G};z] = \{K_z : \ (K_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[\mathbb{G}]\}$, имеем из (77), что $\Lambda_z \in \tilde{\mathbb{T}}_r[\mathbb{G};z]$. Согласно (76) $\Lambda_z = \mathbb{K}_1$ и с учетом (74) получаем равенство $\Lambda_z = M$, а тогда $M \in \tilde{\mathbb{T}}_r[\mathbb{G};z]$ и, тем более,

$$M \in \bigcup_{K\in\mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K;z],$$

что невозможно (см. (72)). Противоречие показывает, что (67) невозможно, $\mathcal{G}_{N-(r+t)+1} = \bigcup\limits_{K\in\mathcal{G}_{N-r+1}} \tilde{\mathbb{T}}_r[K;t] \ \ \forall t \in \overline{0,N-r}$. В частности, справедливо равенство (65). □

Предложение 13. *Если* $r \in \overline{2,N-1}, \ K \in \mathcal{G}_{N-r+1}, \ t \in \overline{0,N-(r+1)}, \ M \in \tilde{\mathbb{T}}_r[K;t]$ *и* $s \in \mathbf{I}(M)$, *то*

$$M \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}_r[K;t+1]. \tag{78}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $r+t \in \overline{2,N-1}$. С учетом (62) можно указать траекторию $(\tilde{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$, для которой реализуется следующее равенство: $M = \tilde{K}_t$. Согласно предложению 6 имеем, следовательно, включение $M \in \mathcal{G}_{N-(r+t)+1}$. Тогда из предложения 10 следует, что для некоторой траектории $(\hat{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+t)}} \in \mathcal{T}_{r+t}[M]$ справедливо равенство $M \setminus \{s\} = \hat{K}_1$. Теперь воспользуемся предложением 9, имея в виду, что $r \in \overline{2,N-1}, \ K \in \mathcal{G}_{N-r+1}, \ (\tilde{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K], \ t \in \overline{0,N-(r+1)}$ и $(\hat{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+t)}} \in \mathcal{T}_{r+t}[M]$. Тогда кортеж $(\mathbb{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} : \ \overline{0,N-r} \longrightarrow \mathcal{G}$, определяемый условиями

$$(\mathbb{K}_j \stackrel{\triangle}{=} \tilde{K}_j \ \ \forall j \in \overline{0,t}) \ \& \ (\mathbb{K}_j \stackrel{\triangle}{=} \hat{K}_{j-t} \ \ \forall j \in \overline{t+1,N-r}), \tag{79}$$

сам является траекторией (см. предложение 9): $(\mathbb{K}_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$. При этом $t+1 \in \overline{t+1,N-r}$, а потому $\mathbb{K}_{t+1} = \hat{K}_1$ и по выбору $((\hat{K}_i)_{i\in\overline{0,N-(r+t)}}$ имеем равенство

$$\mathbb{K}_{t+1} = M \setminus \{s\}. \tag{80}$$

С другой стороны, из (62) следует, что $\tilde{\mathbb{T}}_r[K;t+1] = \{K_{t+1} : \ (K_i)_{i\in\overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]\}$. Поэтому, в частности, $\mathbb{K}_{t+1} \in \tilde{\mathbb{T}}_r[K;t+1]$ и (см. (80)) справедливо (78). □

Из предложения 13 следует, что $\forall K \in \mathcal{G}_{N-1} \ \forall t \in \overline{0,N-3} \ \forall \mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] \ \forall s \in \mathbf{I}(\mathbb{M})$

$$\mathbb{M} \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t+1]. \tag{81}$$

Свойство (81) существенно в связи с (21) (преобразование слоев функции Беллмана):

$$\mathcal{V}_s(x,\mathbb{M}) = \min_{j\in\mathbf{I}(\mathbb{M})} \ \min_{z\in M_j\times M_j} [\mathbf{c}(x,\mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathcal{V}_{s-1}(\mathrm{pr}_2(z),\mathbb{M}\setminus\{j\})] \ \ \forall s \in \overline{1,N} \ \forall (x,\mathbb{M}) \in D_s. \tag{82}$$

Для нас сейчас существенно следующее обстоятельство, связанное с (81), (82): если $K \in \mathcal{G}_{N-1}, \ s \in \overline{2,N-1}$ и $(x,\mathbb{M}) \in D_s$, причем $\mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-(s+1)]$, то

$$\mathbb{M} \setminus \{j\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-s] \ \ \forall j \in \mathbf{I}(\mathbb{M}). \tag{83}$$

С учетом (83) вычисления на основе (82) можно проводить в пределах ОД, отвечающих одному и тому же начальному множеству K (см. следующий раздел).

Предложение 14. *Если* $r \in \overline{2, N-1}, K \in \mathcal{G}_{N-r+1}$ *и* $t \in \overline{0, N-r}$, *то*

$$\tilde{\mathbb{T}}_r[K;t] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{N-(r+t)+1}).$$

Доказательство. Согласно предложению 7 $\mathcal{T}_r[K] \neq \varnothing$, причем

$$\tilde{\mathbb{T}}_r[K;t] \subset \mathcal{G}_{N-(r+t)+1}. \tag{84}$$

Пусть $(K_i)_{i \in \overline{0,N-r}} \in \mathcal{T}_r[K]$. Согласно (62) $K_t \in \tilde{\mathbb{T}}_r[K;t]$. Теперь учтем (84). □

Отметим в качестве очевидного следствия, что, в частности,

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{N-(t+1)}) \ \ \forall K \in \mathcal{G}_{N-1} \ \forall t \in \overline{0, N-2}. \tag{85}$$

6. Построение потоков значений функции Беллмана

Рассмотрим построение частичных массивов значений функции Беллмана, имея в виду последующее применение предложения 12. В данном разделе речь пойдет об одной ветви процедуры, которая имеет смысл своеобразного потока с фиксированным начальным состоянием. Мы рассматриваем систему множеств (62), т.е. систему ОД «процесса» с заданным начальным условием: фиксируем в пределах настоящего раздела множество

$$K \in \mathcal{G}_{N-1}. \tag{86}$$

Далее в этом разделе работаем с множествами (62) при фиксации K (86). Приведем конкретизации общих положений, соответствующие случаю (86). Из предложения 6 имеем

$$K_j \in \mathcal{G}_{N-(j+1)} \ \ \forall (K_i)_{i \in \overline{0,N-2}} \in \mathcal{T}_2[K] \ \forall j \in \overline{0, N-2}. \tag{87}$$

Согласно предложению 7 $\mathcal{T}_2[K] \neq \varnothing$. Из предложения 10 вытекает, в частности, что $\forall s \in \mathbf{I}(K) \ \exists (K_i)_{i \in \overline{0,N-2}} \in \mathcal{T}_2[K] : \ K_1 = K \setminus \{s\}$. Кроме того (см. (62), (86)),

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] = \{K_t : \ (K_i)_{i \in \overline{0,N-2}} \in \mathcal{T}_2[K]\} \ \ \forall t \in \overline{0, N-2}. \tag{88}$$

Из (88) следует, конечно, что при всяком выборе траектории $(K_i)_{i \in \overline{0,N-2}} \in \mathcal{T}_2[K]$ и «момента» $t \in \overline{0, N-2}$ непременно

$$K_t \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t]. \tag{89}$$

Семейства вида (88) «составлены» из множеств (89). Здесь же отметим очевидные конкретизации (81) и (85), учитывающие (86):

$$\begin{gathered}(\mathbb{M} \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t+1] \ \ \forall t \in \overline{0, N-3} \ \forall \mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] \ \forall s \in \mathbf{I}(\mathbb{M})) \ \& \\ \& \ (\tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{N-(t+1)}) \ \ \forall t \in \overline{0, N-2}).\end{gathered} \tag{90}$$

Отметим, наконец, что из (63) и (86) вытекают свойства

$$(\tilde{\mathbb{T}}_2[K;0] = \{K\}) \ \& \ (\tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-2] \subset \mathcal{G}_1). \tag{91}$$

Из (89) и (91) получаем, следовательно, включения $K_{N-2} \in \mathcal{G}_1 \ \ \forall (K_i)_{i \in \overline{0,N-2}} \in \mathcal{T}_2[K]$. Из (90) и (91) получаем, в частности, что $\tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-2] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_1)$.

Согласно (15)–(17) и (37) имеем, однако, следующее положение:

$$\mathbb{D}_s[\tilde{K}] \in \mathcal{P}'(D_s) \ \ \forall s \in \overline{1, N-1} \ \forall \tilde{K} \in \mathcal{G}_s. \tag{92}$$

Возвращаясь к (90), заметим, что (см. (92))

$$\mathbb{D}_{N-(t+1)}[\tilde{K}] \in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)}) \;\; \forall t \in \overline{0, N-2} \, \forall \tilde{K} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; t]. \tag{93}$$

Как следствие из (90) и (93) следует, что

$$\bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t]} \mathbb{D}_{N-(t+1)}[P] \in \mathcal{P}'(D_{N-(t+1)}) \;\; \forall t \in \overline{0, N-2}. \tag{94}$$

Посредством (94) определены K-слои пространства позиций, т.е. слои, выделяемые процессору, за которым «закреплен» список (86). Отметим, что из (94) следует свойство

$$\bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-2]} \mathbb{D}_1[P] \in \mathcal{P}'(D_1). \tag{95}$$

Заметим теперь, что справедлива следующая система включений $N-(s+1) \in \overline{0, N-2} \;\; \forall s \in \overline{1, N-1}$. Это свойство позволяет рассматривать (см. (90)) множества

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(s+1)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_s) \;\; \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{96}$$

С учетом (17) и (96) мы, в частности, получаем, что

$$\mathcal{D}_s[K] \overset{\triangle}{=} \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-(s+1)]} \mathbb{D}_s[P] \in \mathcal{P}'(D_s) \;\; \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{97}$$

В частности (см. (95)), из (96) и (97) получаем, что

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-2] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_1) : \; \mathcal{D}_1[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-2]} \mathbb{D}_1[P] \in \mathcal{P}'(D_1). \tag{98}$$

Предложение 15. *Если* $t \in \overline{1, N-2}$, $(x, \mathbb{K}) \in \mathcal{D}_{t+1}[K]$, $s \in \mathbf{I}(\mathbb{K})$ *и* $y \in M_s$, *то*

$$(y, \mathbb{K} \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_t[K]. \tag{99}$$

Доказательство. Поскольку $N-(t+1) \in \overline{1, N-2}$, имеем с учетом (97)

$$\mathcal{D}_t[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-(t+1)]} \mathbb{D}_t[P] \in \mathcal{P}'(D_t). \tag{100}$$

Согласно (96) $\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+1)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_t)$. При этом $t+1 \in \overline{2, N-1}$ и, кроме того, $N-((t+1)+1) = N-(t+2) \in \overline{0, N-3}$. . Согласно (97)

$$\mathcal{D}_{t+1}[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;N-(t+2)]} \mathbb{D}_{t+1}[P] \in \mathcal{P}'(D_{t+1}). \tag{101}$$

Из (20) вытекает, что справедливо включение $(y, \mathbb{K} \setminus \{s\}) \in D_t$ (поскольку согласно (101) имеем по выбору $(x, \mathbb{K})$ включение $(x, \mathbb{K}) \in D_{t+1}$). Кроме того, из (90) следует, что

$$\mathbb{M} \setminus \{h\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+1)] \;\; \forall \mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+2)] \, \forall h \in \mathbf{I}(\mathbb{M}). \tag{102}$$

При этом по выбору $(x, \mathbb{K})$ имеем из (101), что для некоторого множества

$$Q \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+2)] \tag{103}$$

справедливо следующее очевидное включение (см. (17))

$$(x, \mathbb{K}) \in \mathbb{D}_{t+1}[Q]. \tag{104}$$

Кроме того, имеем согласно (90), что непременно

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+2)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{t+1}), \tag{105}$$

а потому из (103) и (105) вытекает включение

$$Q \in \mathcal{G}_{t+1}. \tag{106}$$

Как следствие из (16) и (106) получаем равенство

$$\mathbb{D}_{t+1}[Q] = \{(\tilde{x}, Q) : \ \tilde{x} \in \mathcal{M}_{t+1}[Q]\}, \tag{107}$$

где согласно (15) $\mathcal{M}_{t+1}[Q] = \bigcup\limits_{j \in J_{t+1}(Q)} M_j$. Из (104) и (107) следует равенство $\mathbb{K} = Q$. Тогда из (103) вытекает очевидное включение

$$\mathbb{K} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+2)] \tag{108}$$

(из (106) имеем также, что $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{t+1}$). С учетом (101) и (108) имеем, что $\mathbb{D}_{t+1}[\mathbb{K}] \subset \mathcal{D}_{t+1}[K]$. Из (102) и (108) имеем по выбору s следующее включение

$$\mathbb{K} \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(t+1)]. \tag{109}$$

Тогда из (100) и (109) получаем, что $\mathbb{D}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}] \subset \mathcal{D}_t[K]$. Напомним, что $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{t+1}$ и $s \in \mathbb{K}$, а потому (см. (12))

$$\mathbb{K} \setminus \{s\} \in \mathcal{G}_t \tag{110}$$

(напомним, что $t+1 \in \overline{2, N-1}$). Поэтому согласно (15) имеем равенство

$$\mathcal{M}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}] = \bigcup_{j \in J_t(\mathbb{K} \setminus \{s\})} M_j \tag{111}$$

(учитываем то, что $t \in \overline{1, N-2}$). Кроме того, отметим, что

$$J_t(\mathbb{K} \setminus \{s\}) = \{j \in \overline{1, N} \setminus (\mathbb{K} \setminus \{s\}) \mid \{j\} \cup (\mathbb{K} \setminus \{s\}) \in \mathcal{G}_{t+1}\}. \tag{112}$$

Согласно (8) имеем по выбору s, что $s \in \mathbb{K}$. Далее, ($s \notin \mathbb{K} \setminus \{s\}$, а тогда $s \in \overline{1, N} \setminus (\mathbb{K} \setminus \{s\})$. Поскольку $\mathbb{K} = \{s\} \cup (\mathbb{K} \setminus \{s\})$ и $\mathbb{K} \in \mathcal{G}_{t+1}$, то $\{s\} \cup (\mathbb{K} \setminus \{s\}) \in \mathcal{G}_{t+1}$ и, как следствие, $s \in J_t(\mathbb{K} \setminus \{s\})$. Тогда (см. (111)) $M_s \subset \mathcal{M}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}]$. В итоге по выбору y имеем включение $y \in \mathcal{M}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}]$. При этом согласно (16) и (110) имеем следующее равенство

$$\mathbb{D}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}] = \{(\tilde{x}, \mathbb{K} \setminus \{s\}) : \ \tilde{x} \in \mathcal{M}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}]\}. \tag{113}$$

Из (113) вытекает, в частности, очевидное включение $(y, \mathbb{K} \setminus \{s\}) \in \mathbb{D}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}]$. Однако из (100) и (109) имеем вложение $\mathbb{D}_t[\mathbb{K} \setminus \{s\}] \subset \mathcal{D}_t[K]$, а потому справедливо (99). $\square$

С учетом (97) и (98) введем (см. раздел 3) следующие функции:

$$\mathcal{W}_s[K] \overset{\triangle}{=} (\mathcal{V}_s(x, P))_{(x,P) \in \mathcal{D}_s[K]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_s[K]] \ \ \forall s \in \overline{1, N-1}. \tag{114}$$

Рассматриваем совокупность множеств (97) как поток позиций, выделенных процессору, «закрепленному» за списком K; аналогичным образом, совокупность функций (114) рассматриваем как поток значений функции Беллмана, реализуемых упомянутым процессором. Построение этих функций осуществляем в виде последовательной процедуры: $\mathcal{W}_1[K] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \mathcal{W}_{N-1}[K]$. Простейший вариант соответствует построению функции

$\mathcal{W}_1[K]: \ \mathcal{D}_1[K] \longrightarrow [0,\infty[$, где $\mathcal{D}_1[K]$ — непустое п/м D_1, определенное в (98). В этом построении следует учитывать (95). Согласно (11)

$$\forall P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-2] \ \exists t \in \overline{1,N} \setminus \mathbf{K}_1: \ P = \{t\}. \tag{115}$$

Итак, все списки из семейства $\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-2]$ одноэлементны. Далее, из (114) следует, что

$$\mathcal{W}_1[K](x,P) = \mathcal{V}_1(x,P) \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_1[K]. \tag{116}$$

В связи с (115), (116) отметим тот факт, что (см. (20),(98))

$$(y, P \setminus \{k\}) \in D_0 \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_1[K] \ \forall k \in \mathbf{I}(P) \ \forall y \in M_k. \tag{117}$$

Как следствие имеем согласно (13) и (117) при $(x,P) \in \mathcal{D}_1[K]$, $k \in \mathbf{I}(P)$ и $y \in M_k$, что $y \in \mathbf{M}$ и $P \setminus \{k\} = \varnothing$, а потому (см. (19)) определено значение $\mathbf{f}(y) = \mathcal{V}_0(y, \varnothing) \in [0,\infty[$. Тогда согласно (21) и (97) получаем (см. (116)), что

$$\mathcal{W}_1[K](x,P) = \mathcal{V}_1(x,P) = \min_{j \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \mathbf{f}(\mathrm{pr}_2(z))] \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_1[K] \tag{118}$$

(см. также (117)). Тем самым (см. (114),(118)) определена функция $\mathcal{W}_1[K]$. Заметим, что внешняя операция минимума в (118) фиктивна, поскольку, как уже отмечалось речь идет об обработке посредством $\mathbf{I}$ одноэлементных списков ($\mathbf{I}$-образ каждого одноэлементного списка есть тот же самый список; см. условие 2.1, (7) и (8)).

Пусть процессор, ответственный за список (86), уже располагает функцией $\mathcal{W}_l[K]$, где $l \in \overline{1, N-2}$. Тогда построение (с использованием только данного процессора) функции $\mathcal{W}_{l+1}[K]$ осуществляется по приводимой ниже схеме.

Прежде всего заметим, что $N - (l+1) \in \overline{1, N-2}$. Далее, из (97) вытекает, что

$$\mathcal{D}_l[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+1)]} \mathbb{D}_l[P] \in \mathcal{P}'(D_l), \tag{119}$$

где согласно (96) имеем по выбору l свойство

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+1)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_l). \tag{120}$$

Функция $\mathcal{W}_l[K]$ (нам известная) такова, что (см. (114)) $\mathcal{W}_l[K] = (\mathcal{V}_l(x,P))_{(x,P) \in \mathcal{D}_l[K]} \in \mathcal{R}_+[\mathcal{D}_l[K]]$. Иными словами, $\mathcal{W}_l[K]: \ \mathcal{D}_l[K] \longrightarrow [0,\infty[$ и при этом

$$\mathcal{W}_l[K](x,P) = \mathcal{V}_l(x,P) \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_l[K]. \tag{121}$$

В связи с построением $\mathcal{W}_{l+1}[K]$ отметим, что $l+1 \in \overline{2, N-1}$ и при этом

$$N - (l+2) = N - ((l+1)+1) \in \overline{0, N-3}. \tag{122}$$

В этом случае согласно (90) определено семейство

$$\tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+2)] \in \mathcal{P}'(\mathcal{G}_{l+1}) \tag{123}$$

и, как следствие (см. (97)), определено также следующее множество

$$\mathcal{D}_{l+1}[K] = \bigcup_{P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+2)]} \mathbb{D}_{l+1}[P] \in \mathcal{P}'(D_{l+1}). \tag{124}$$

Заметим теперь, что согласно (20) и (124) реализуется система включений

$$(y, P \setminus \{s\}) \in D_l \ \ \forall (x, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K] \ \forall s \in \mathbf{I}(P) \ \forall y \in M_s. \tag{125}$$

Вместе с тем из (90) и (122) вытекает, что

$$P \setminus \{s\} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+1)] \ \ \forall P \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; N-(l+2)] \ \forall s \in \mathbf{I}(P). \tag{126}$$

Но в этом случае из (17), (97), (124)-(126) получаем, что

$$(y, P \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_l[K] \ \ \forall (x, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K] \ \forall s \in \mathbf{I}(P) \ \forall y \in M_s. \tag{127}$$

Замечание 1. Проверим (127), фиксируя $(x, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K], \ s \in \mathbf{I}(P)$ и $y \in M_s$ (напомним, что $l \in \overline{1, N-2}$). Из (124) имеем для некоторого $\hat{K} \in \tilde{T}_2[K; N-(l+2)]$

$$(x, P) \in \mathbb{D}_{l+1}[\hat{K}]. \tag{128}$$

Из (16) получаем, что $P = \hat{K}$ и при этом $x \in \mathcal{M}_{l+1}[\hat{K}]$, т.е. $x \in \mathcal{M}_{l+1}[P]$. Из (126) следует, что для множества $P = \hat{K} \in \tilde{T}_2[K; N-(l+2)]$ реализуется включение

$$P \setminus \{s\} \in \tilde{T}_2[K; N-(l+1)]. \tag{129}$$

Напомним здесь же, что согласно (15) справедливо равенство

$$\mathcal{M}_l[P \setminus \{s\}] = \bigcup_{j \in J_l(P \setminus \{s\})} M_j \tag{130}$$

(учитываем, что согласно (120) и (129) $P \setminus \{s\} \in \mathcal{G}_l$), где

$$J_l(P \setminus \{s\}) = \{j \in \overline{1, N} \setminus (P \setminus \{s\}) \mid \{j\} \cup (P \setminus \{s\}) \in \mathcal{G}_{l+1}\}. \tag{131}$$

По выбору s имеем (см. (8)), что $s \in P$, причем $\{s\} \cup (P \setminus \{s\}) = P \in \mathcal{G}_{l+1}$ (см. в этой связи (123)), где $s \in \overline{1, N} \setminus (P \setminus \{s\})$, т.к. $s \notin P \setminus \{s\}$. В итоге согласно (131) $s \in J_l(P \setminus \{s\})$, а тогда согласно (130)

$$M_s \subset \mathcal{M}_l[P \setminus \{s\}]. \tag{132}$$

Из (16) вытекает (поскольку $P \setminus \{s\} \in \mathcal{G}_l$), что справедливо равенство

$$\mathbb{D}_l[P \setminus \{s\}] = \{(u, P \setminus \{s\}) : \ u \in \mathcal{M}_l[P \setminus \{s\}]\}. \tag{133}$$

Из (132) имеем по выбору y, что $y \in \mathcal{M}_l[P \setminus \{s\}]$; тогда из (133) получаем, что $(y, P \setminus \{s\}) \in \mathbb{D}_l[P \setminus \{s\}]$, где (см. (119), (129)) $\mathbb{D}_l[P \setminus \{s\}] \subset \mathcal{D}_l[K]$. Итак, $(y, P \setminus \{s\}) \in \mathcal{D}_l[K]$. □

Из (121),(127) следует, что при $(x, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K], \ s \in \mathbf{I}(P)$ и $y \in M_s$

$$\mathcal{W}_l[K](y, P \setminus \{s\}) = \mathcal{V}_l(y, P \setminus \{s\}) \in [0, \infty[. \tag{134}$$

Поэтому при $(x, P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$ определена (см. (121),(134)) величина

$$\min_{s \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in M_s \times M_s} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_s(z) + \mathcal{W}_l[K](\mathrm{pr}_2(z), P \setminus \{s\})] =$$
$$= \min_{s \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in M_s \times M_s} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_s(z) + \mathcal{V}_l(\mathrm{pr}_2(z), P \setminus \{s\})] \in [0, \infty[,$$

а из (21) получаем, следовательно, очевидное равенство

$$\mathcal{V}_{l+1}(x, P) = \min_{s \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in M_s \times M_s} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_s(z) + \mathcal{W}_l[K](\mathrm{pr}_2(z), P \setminus \{s\})]. \tag{135}$$

Вместе с тем согласно (114) $\mathcal{W}_{l+1}[K](x,P) = \mathcal{V}_{l+1}(x,P) \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]$. В итоге из (135) имеем следующее представление функции $\mathcal{W}_{l+1}[K]$:

$$\begin{gathered} \mathcal{W}_{l+1}[K](x,P) = \min_{j \in \mathbf{I}(P)} \min_{z \in M_j \times M_j} [\mathbf{c}(x, \mathrm{pr}_1(z)) + c_j(z) + \\ + \mathcal{W}_l[K](\mathrm{pr}_2(z), P \setminus \{j\})] \ \ \forall (x,P) \in \mathcal{D}_{l+1}[K]. \end{gathered} \tag{136}$$

Итак, получено правило преобразования $\mathcal{W}_l[K] \longrightarrow \mathcal{W}_{l+1}[K]$, где $l \in \overline{1, N-2}$ — произвольный индекс. Располагая (см. (118)) функцией $\mathcal{W}_1[K]$ и используя данное правило (см. (136)), мы рекурсивно определяем затем $\mathcal{W}_2[K], ..., \mathcal{W}_{N-1}[K]$. Таким образом, правило (136), применяемое при всевозможных $l \in \overline{1, N-2}$, позволяет построить все функции

$$\mathcal{W}_1[K] : \ \mathcal{D}_1[K] \longrightarrow [0, \infty[, ..., \mathcal{W}_N[K] : \ \mathcal{D}_{N-1}[K] \longrightarrow [0, \infty[. \tag{137}$$

Предложение 16. *Если* $t \in \overline{0, N-3}$, *то* $\tilde{\mathbb{T}}_2[K; t+1] = \{\mathbb{M} \setminus \{h\} : \ \mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t], \ h \in \mathbf{I}(\mathbb{M})\}$.

Доказательство. Пусть $\mathbb{H} \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{M} \setminus \{h\} : \ \mathbb{M} \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t], \ h \in \mathbf{I}(\mathbb{M})\}$. Тогда согласно (90) имеем вложение $\mathbb{H} \subset \tilde{\mathbb{T}}_2[K; t+1]$. Осталось установить противоположное вложение.

Выберем произвольно $\Lambda \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K; t+1]$. Тогда согласно (88) для некоторой траектории $(\mathbb{L}_i)_{i \in \overline{0, N-2}} \in \mathcal{T}_2[K]$ имеем равенство $\Lambda = \mathbb{L}_{t+1}$. С учетом (45) можно указать $\theta \in \mathbf{I}(\mathbb{L}_t)$, для которого $\mathbb{L}_{t+1} = \mathbb{L}_t \setminus \{\theta\}$. Иными словами, $\Lambda = \mathbb{L}_t \setminus \{\theta\}$. Заметим, что $t \in \overline{0, N-2}$. Поэтому согласно (89) $\mathbb{L}_t \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t]$. Таким образом, $\mathbb{L}_t \in \tilde{\mathbb{T}}_2[K;t] : \ \ \theta \in \mathbf{I}(\mathbb{L}_t)$. По определению $\mathbb{H}$ имеем, что $\mathbb{L}_t \setminus \{\theta\} \in \mathbb{H}$. Поэтому $\Lambda \in \mathbb{H}$. Итак, установлено вложение $\tilde{\mathbb{T}}_2[K; t+1] \subset \mathbb{H}$. $\square$

7. Построение слоев функции Беллмана

Заметим, что в предыдущем разделе множество (86) выбиралось произвольно. Поэтому конструкция на основе (136) реализуется при любом $K \in \mathcal{G}_{N-1}$; в этой связи используем ниже обозначения (97), (114) применительно к любому множеству (86). Построение $\mathcal{V}_1, ..., \mathcal{V}_N$ осуществляется путем склеивания функций вида (114).

Предложение 17. *Если* $s \in \overline{1, N-1}$, *то справедливо следующее равенство:*

$$D_s = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K]. \tag{138}$$

Доказательство. Из (97) вытекает очевидное вложение

$$\bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K] \subset D_s. \tag{139}$$

Пусть $(x_*, K_*) \in D_s$ (см. (18)). Согласно (17) имеем для некоторого множества

$$\Theta \in \mathcal{G}_s \tag{140}$$

следующее включение:

$$(x_*, K_*) \in \mathbb{D}_s[\Theta]. \tag{141}$$

Согласно (10) $\Theta \in \mathcal{G}$ и $\Theta \in \mathfrak{N}_s$, причем $\tau \stackrel{\triangle}{=} N - (s+1) \in \overline{0, N-2}$; имеем равенство $N - (\tau + 1) = s$. Воспользуемся предложением 12 при условии, что в его формулировке $r = 2$ и $\mathbf{t} = \tau$. Тогда (см. (65)) $N - (2 + \tau) + 1 = s$ и

$$\mathcal{G}_s = \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \tilde{T}_2[K; \tau]. \tag{142}$$

Из (140) и (142) вытекает, что для некоторого множества (списка)

$$Q \in \mathcal{G}_{N-1} \tag{143}$$

$\Theta \in \tilde{T}_2[Q;\tau]$. Напомним, что $s \in \overline{1, N-1}$, а тогда согласно (97) следует совпадение $\mathcal{D}_s[Q]$ и объединения всех множеств $\mathbb{D}_s[P]$, $P \in \tilde{T}_2[Q;\tau]$. Поэтому $\mathbb{D}_s[\Theta] \subset \mathcal{D}_s[Q]$. Из (141) вытекает следующее включение: $(x_*, K_*) \in \mathcal{D}_s[Q]$. С учетом (143) получаем, что $(x_*, K_*) \in \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K]$. Итак, $D_s \subset \bigcup_{K \in \mathcal{G}_{N-1}} \mathcal{D}_s[K]$. Используя (139) получаем равенство (138). □

При $s \in \overline{1, N-1}$ $\mathcal{V}_s$ полностью определяется (см. предложение 17, (114)) функциями $\mathcal{W}_s[K]$, $K \in \mathcal{G}_{N-1}$: если $(x_0, K_0) \in D_s$, то для любого множества $\mathbb{K}_0 \in \mathcal{G}_{N-1}$ со свойством $(x_0, K_0) \in \mathcal{D}_s[\mathbb{K}_0]$ (такое множество существует в силу предложения 17) $\mathcal{V}_s(x_0, K_0) = \mathcal{W}_s[\mathbb{K}_0](x_0, K_0)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 09-01-00436, 10-01-96020) и программ фундаментальных исследований Президиума РАН (проекты 09-П-1-1007, 09-П-1-1014).

Литература

1. Ченцов, А.А. Экстремальная задача маршрутизации с внутренними потерями / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2008. — Т. 14, № 3. — С. 183—201.
2. Ченцов, А.Г. Об оптимальной маршрутизации в условиях ограничений / А.Г. Ченцов // Докл. Акад. наук. — 2008. — Т. 423, № 3. – С. 303—307.
3. Ченцов, А.А. Экстремальная задача маршрутизации перемещений с ограничениями и внутренними потерями / А.А. Ченцов, А.Г Ченцов, П.А. Ченцов // Изв. вузов. Математика. — 2010. — № 6. — С. 64—81.
4. Ченцов, А.Г. Метод динамического программирования в экстремальных задачах маршрутизации с ограничениями / А.Г. Ченцов // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010.— № 3.— С. 61—73.
5. Ченцов, А.А. Условия предшествования в одной задаче экстремальной маршрутизации с внутренними работами / А.А. Ченцов, А.Г. Ченцов, П.А. Ченцов // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. — 2010. — Вып 10. — С. 60—76.
6. Ченцов, А.Г. Экстремальные задачи маршрутизации и распределения заданий: вопросы теории / А.Г. Ченцов. – М.: Ин-т компъютерных исследований, 2008. — 240 с.
7. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Вопросы теории / И.И. Меламед, С.И.Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. — 1989.— № 9.— С. 3—34.
8. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Точные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И.Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика.— 1989.– № 10.– С. 3–29.
9. Меламед, И.И. Задача коммивояжера. Приближенные алгоритмы / И.И. Меламед, С.И.Сергеев, И.Х. Сигал // Автоматика и телемеханика. – 1989.– № 11.– С. 3–26.
10. Гэри М. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / М. Гэри, Д. Джонсон. – М.: Мир, 1982.– 416 с.
11. Беллман, Р. Применение динамического программирования к задаче о коммивояжере / Р. Беллман // Кибернетический сборник. – М.: Мир, 1964.– Т. 9.– С. 219–228.
12. Хелд, М. Применение динамического программирования к задачам упорядочения / М. Хелд, Р.М. Карп. // Кибернетический сборник. – М., 1964.– Т. 9. – С. 202–218.

13. Использование метода динамического программирования для оптимизации траектории перемещения работников в радиационно опасных зонах с целью минимизации облучения / А.Н. Сесекин, О.Л. Ташлыков, С.Е. Щеклеин, М.Ю. Куклин, А.Г. Ченцов, А.А. Кадников // Изв. вузов. Ядерная энергетика.– 2006. – № 2. – С. 41–48.
14. Разработка оптимальных алгоритмов вывода АЭС из эксплуатации с использованием методов математического моделирования / О.Л. Ташлыков, А.Н. Сесекин, С.Е. Щеклеин, А.Г. Ченцов // Изв. вузов. Ядерная энергетика. – 2009. — № 2. — С. 115–120.
15. Куратовский, К. Теория множеств / К. Куратовский, А. Мостовский. – М.: Мир, 1970.
16. Кормэн, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормэн, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 1990. – 960 с.
17. Варга, Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга.– М.: Наука, 1977.– 624 с.
18. Красовский, Н.Н. Теория управления движением / Н.Н. Красовский.– М.: Наука, 1968. – 475 с.
19. Панасюк, А.И. Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем / А.И. Панасюк, В.И. Панасюк.– Минск: Наука и техника, 1986.– 296 с.

Александр Георгиевич Ченцов, доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, зав. отделом управляемых систем, Институт математики и механики УрО РАН (г. Екатеринбург, Российская Федерация), chentsov@imm.uran.ru.

MSC 93CXX

A Parallel Procedure of Constructing Bellman Function in the Generalized Courier Problem with Interior Works

A.G. Chentsov, Institute of Mathematics and Mechanics,
Ural Branch of the Russian Academy of Sciences (Yekaterinburg, Russian Federation)

A construction of the parallel realization of dynamic programming method for solving the problem of sequential visiting for sets (megalopolises) with constraints in the form of preceding conditions; this problem is called generalized courier problem. It is supposed that, on these sets, the works with inputs are fulfilled. The computing procedure used partial constructing of the Bellman function array and realized by layers of the position space is investigated. In the foundation of construction the idea of a discrete dynamic system is situated; for this system, attainability domains realized by recurrence scheme are constructed.

Keywords: route, megalopolis, dynamic programming.

References

1. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extreme Routing Problem with Internal Losses [Ekstremal'naya zadacha marshrutizatsii s vnutrennimi poteryami]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, Yekaterinburg, 2008, vol. 14, no. 3, pp. 183–201.
2. Chentsov A.G. About the Optimal Routing with the Conditions of Constraints [Ob optimal'noi marshrutizatsii v usloviyakh ogranichenii]. *Doklady Akademii nauk*, 2008, vol. 423, no. 3, pp. 303–307.
3. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. Extreme Movements of Routing Problem with Constraints and Internal Losses [Ekstremal'naya zadacha marshrutizatsii peremeshchenii s ogranicheniyami i vnutrennimi poteryami]. *Izv. vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika*, Kazan', 2010, no. 6, pp. 64–81.

4. Chentsov A.G. Dynamic Programming Method in Extremal Problems with Constraints Routing [Metod dinamicheskogo programmirovaniya v ekstremal'nikh zadachakh marshrutizatsii s ogranicheniyami]. *Izv. RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2010, no. 3, pp. 61–73.
5. Chentsov A.A., Chentsov A.G., Chentsov P.A. The Conditions of Precedence in a Problem of Extreme Route with the Inner Workings [Usloviya predshestvovaniya v odnoi zadache ekstremal'noi marshrutizatsii s vnutrennimi rabotami]. *Algoritmy i programmnye sredstva parallel'nikh vichislenii*, 2010, no. 10, pp. 60–76.
6. Chentsov A.G. *Ekstremal'nye zadachi marshrutizatsii i raspredeleniya zadanii: voprosy teorii* [Extremal Problems of Routing and Assignment of Tasks: Questions of Theory], Izhevsk: NITS «Regular and Chaotic Dynamics», Izhevsk Institute of Computer Research, 2008, 240 p.
7. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling Salesman Problem. Questions of Theory [Zadacha kommivoyazhera. Voprosy teorii]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 9, pp. 3–34.
8. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling Salesman Problem. Precise Algorithms [Zadacha kommivoyazhera.Tochnye algoritmy]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 10, pp. 3–29.
9. Melamed I.I., Sergeev S.I., Sigal I.Kh. Traveling Salesman Problem. Approximate Algorithms [Zadacha kommivoyazhera. Priblizhennye algoritmy]. *Avtomatika i telemekhanika*, 1989, no. 11, pp. 3–26.
10. Geri M., Jonson D. *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi* [Calculating Machines and Difficult Problems], Moscow: Mir, 1982. 416 p.
11. Bellman R. Use Dynamic Programming to the Problem of a Salesman [Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadache o kommivoyazhere]. *Kiberneticheskii sbornik*, Moscow, Mir, 1964, vol. 9, pp. 219–228.
12. Held M. Use Dynamic Programming to the Problems of Ordering [Primenenie dinamicheskogo programmirovaniya k zadacham uporyadocheniya]. *Kiberneticheskii sbornik*, Moscow, Mir, 1964, vol. 9, pp. 202–218.
13. Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Shcheklein S.E., Kuklin M.Yu., Chentsov A.G., Kadnikov A.A. Use of Dynamic Programming Method to Optimize the Trajectory of Movement of Workers in Radioactive Areas to Minimize Exposure [Ispol'zovanie metoda dinamicheskogo programmirovaniya dlya optimizatsii traektorii peremeshcheniya rabotnikov v radiatsionno opasnykh zonakh s tsel'yu minimizatsii oblucheniya]. *Izv. vysshikh uchebnykh zavedenii. Yadernaya energetika*, 2006, no. 2, pp. 41–48.
14. Sesekin A.N., Tashlykov O.L., Shcheklein S.E., Chentsov A.G. Development of Optimal Algorithms for Decommissioning of NPP by the Methods of Mathematical Modeling [Razrabotka optimal'nykh algoritmov vyvoda AES iz ekspluatatsii s ispol'zovaniem metodov matematicheskogo modelirovaniya]. *Izv. vysshikh uchebnykh zavedenii. Yadernaya energetika*, 2009, no. 2, pp. 115–120.
15. Kuratovskii K., Mostovskii A. *Teoriya mnozhestv.* [Set Theory]. Moscow, Mir, 1970. 416 p.
16. Kormen A., Leizerson Ch., Rivest R. *Algoritmy. Postroenie i analiz* [The Algorithms. Construction and Analysis]. Moscow, MTSNMO, 1990. 960 p.
17. Warga Dj. *Optimal'noe upravlenie differentsial'nymi i functsional'nymi uravneniyami* [Optimal Control of Differential and Functional Equations]. Moscow, Nauka, 1977. 624 p.
18. Krasovskii N.N. *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of traffic control]. Moscow, Nauka, 1968. 475 p.
19. Panasyuk A.I., Panasyuk V.I. *Asimptoticheskaya magistral'naya optimizatsiya upravlyaemykh sistem* [Asymptotic Optimization Trunk of Control Systems]. Minsk, Nauka i tekhnika, 1986. 296 p.

Поступила в редакцию 1 февраля 2012 г.